

# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: SAS, SSS Proving Congruence—SAS, SSS



لماذا؟

فيما سبق:

إثبات تطابق المثلثات  
باستعمال تعريف التطابق.

والآن:

تعدّ السبورة المزدوجة على صورة الحرف A طريقة مناسبة لعرض المعلومات،  
لأنها تُطوى عند التخزين فقط، ولكن لأنها تكون ثابتة تمامًا عند وضع الذراعين  
الجانبين في موقعيهما. وعندما يكون للذراعين الطول نفسه ويتم تثبيتهما على أبعاد  
متساوية من القمة على الجانبين فإن السبورة المفتوحة تشكّل مثلثين متطابقين هما  
 $\triangle ABC, \triangle XYZ$ .

- أستعمل المسلمة SSS
- لا اختبار تطابق المثلثات.
- أستعمل المسلمة SAS
- لا اختبار تطابق المثلثات.

**مسلمة SSS :** ستكتشف في هذا الدرس أنه ليس من الضروري أن تبين تطابق الأضلاع المتناظرة وتطابق  
الزوايا المتناظرة في مثلثين لتثبت أنهما متطابقان.

تبيّن السبورة المزدوجة أنه إذا كانت أطوال الأضلاع المتناظرة لمثلثين متساوية فإن المثلثين متطابقان. وهذا ما  
تنصّ عليه المسلمة الآتية:

المفردات:

الزاوية المحصورة  
Included Angle

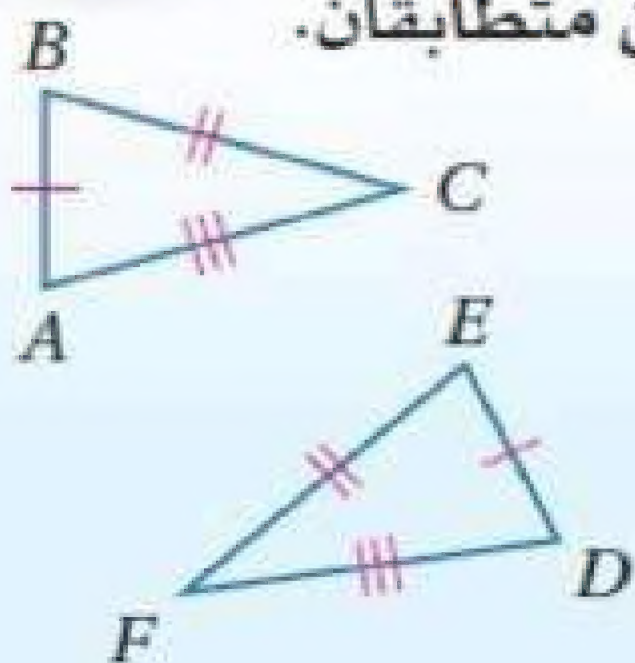
أضف إلى

مطوبتك

## مسلمة 3.1

التطابق بثلاثة أضلاع (SSS)

إذا تطابقت أضلاع مثلث مع الأضلاع المناظرة لها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.



$$\begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{DE}, \\ \overline{BC} &\cong \overline{EF}, \\ \overline{AC} &\cong \overline{DF} \end{aligned}$$

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF \text{ فإن}$$





# ٣-٤ إثباتات التطابق في حالتى: $SSS$ , $SAS$ Proving Congruence— $SSS$ , $SAS$

### مثال 1

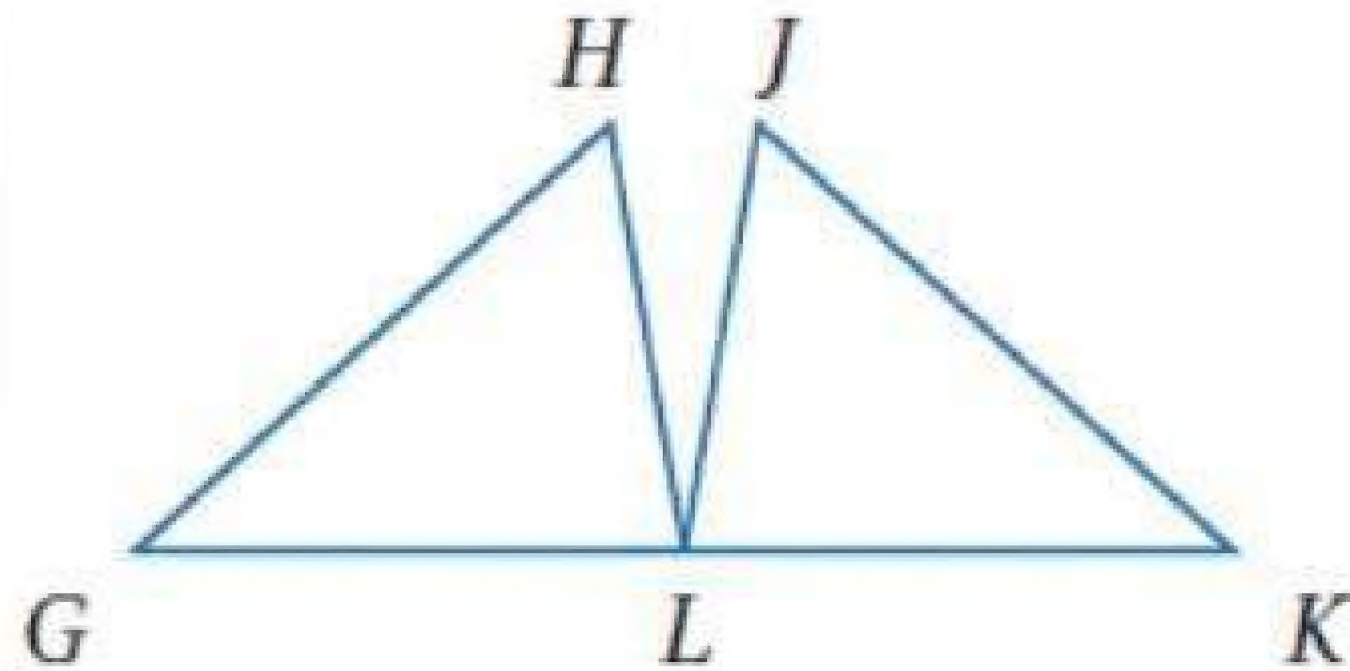
استعمال المسلمة  $SSS$  لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات:  $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ,  $\overline{HL} \cong \overline{JL}$ ,  $L$  نقطة منتصف  $\overline{GK}$ .

المطلوب: إثبات أن  $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:



$$\triangle GHL \cong \triangle KJL$$

$SSS$

$$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$$

معطى

$$\overline{HL} \cong \overline{JL}$$

معطى

$$\overline{GL} \cong \overline{KL}$$

نظرية نقطة المنتصف

$L$  هي نقطة منتصف  $\overline{GK}$

معطى





# ٣-٤ إثباتات التطابق في حالتى: $SSS$ , $SAS$ Proving Congruence— $SSS$ , $SAS$

### مثال 1

استعمال المسلمة  $SSS$  لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات:  $\overline{GH} \cong \overline{KJ}$ ,  $\overline{HL} \cong \overline{JL}$ ,  $L$  نقطة منتصف  $\overline{GK}$ .

المطلوب: إثبات أن  $\triangle GHL \cong \triangle KJL$

البرهان:

$$\overline{GH} \cong \overline{KJ}$$

معطى

$$\overline{HL} \cong \overline{JL}$$

معطى

$$\triangle GHL \cong \triangle KJL$$

$SSS$

$$\overline{GL} \cong \overline{KL}$$

نظرية نقطة المنتصف

$L$  هي نقطة منتصف  $\overline{GK}$

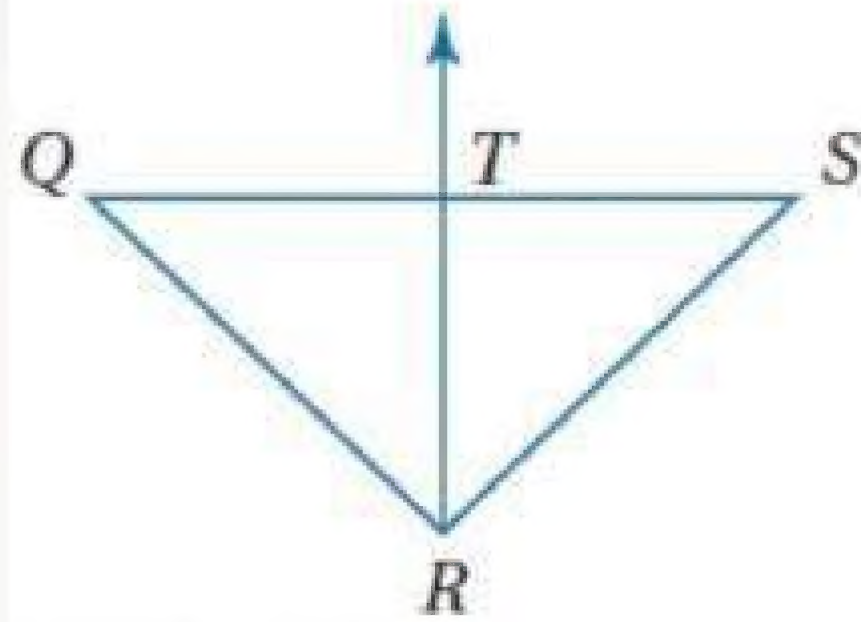
معطى





# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SAS$ , $SSS$ Proving Congruence— $SAS$ , $SAS$

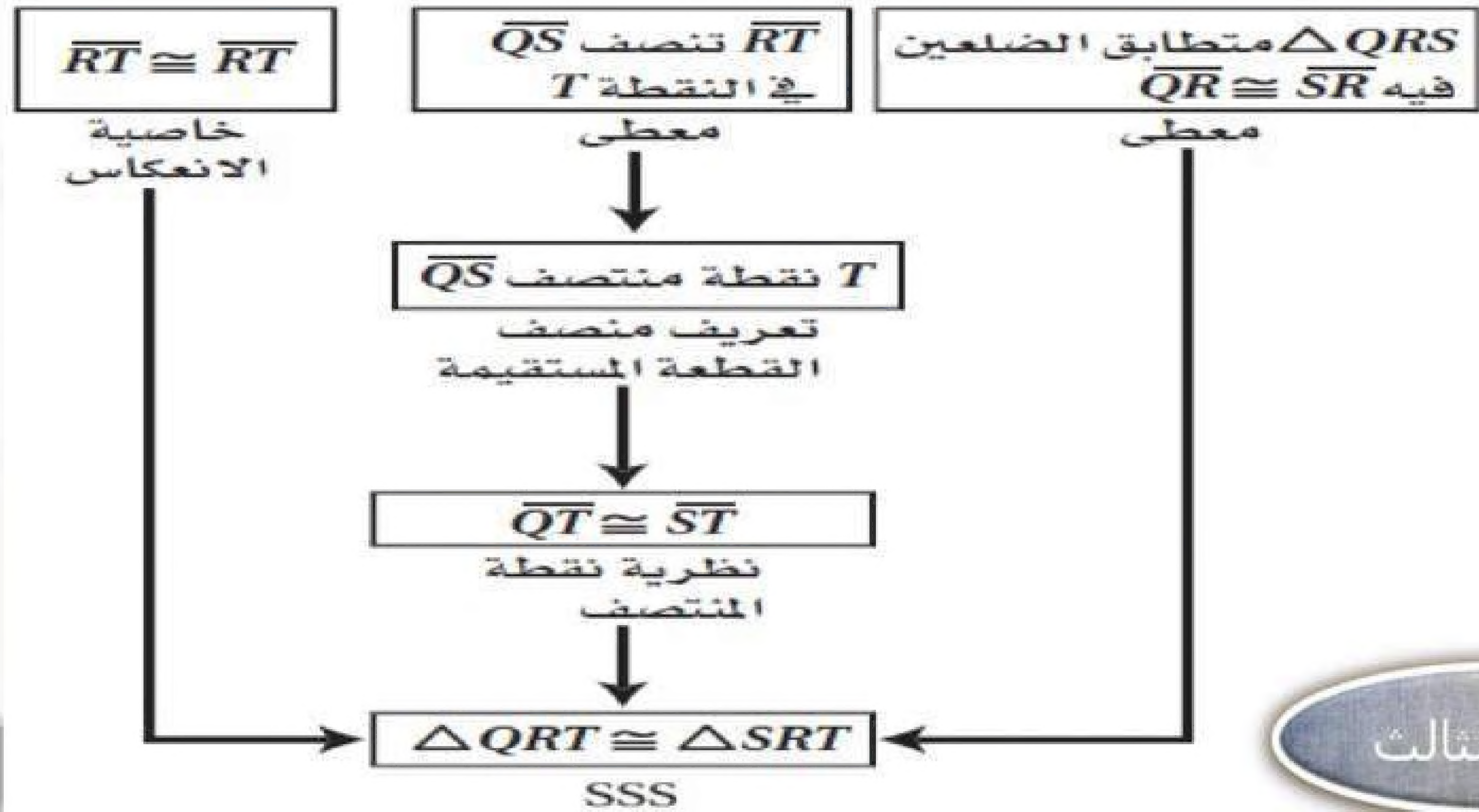
(1) اكتب برهانًا تسلسليًا.



المعطيات:  $\triangle QRS$  متطابق الضلعين، فيه،  $\overline{QR} \cong \overline{SR}$ .  
 $\overline{RT}$  تنصف  $\overline{QS}$  عند النقطة  $T$ .

المطلوب: إثبات أن  $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

(1) البرهان :





# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SSS, SAS$ Proving Congruence— $SSS, SAS$

## الفصل الثالث

### مثال 2 على اختبار معياري

**إجابة مطولة:** إحداثيات رؤوس المثلث  $ABC$  هي:  $A(1, 1), B(0, 3), C(2, 5)$ .  
ورؤوس المثلث  $EFG$  هي:  $E(1, -1), F(2, -5), G(4, -4)$ .

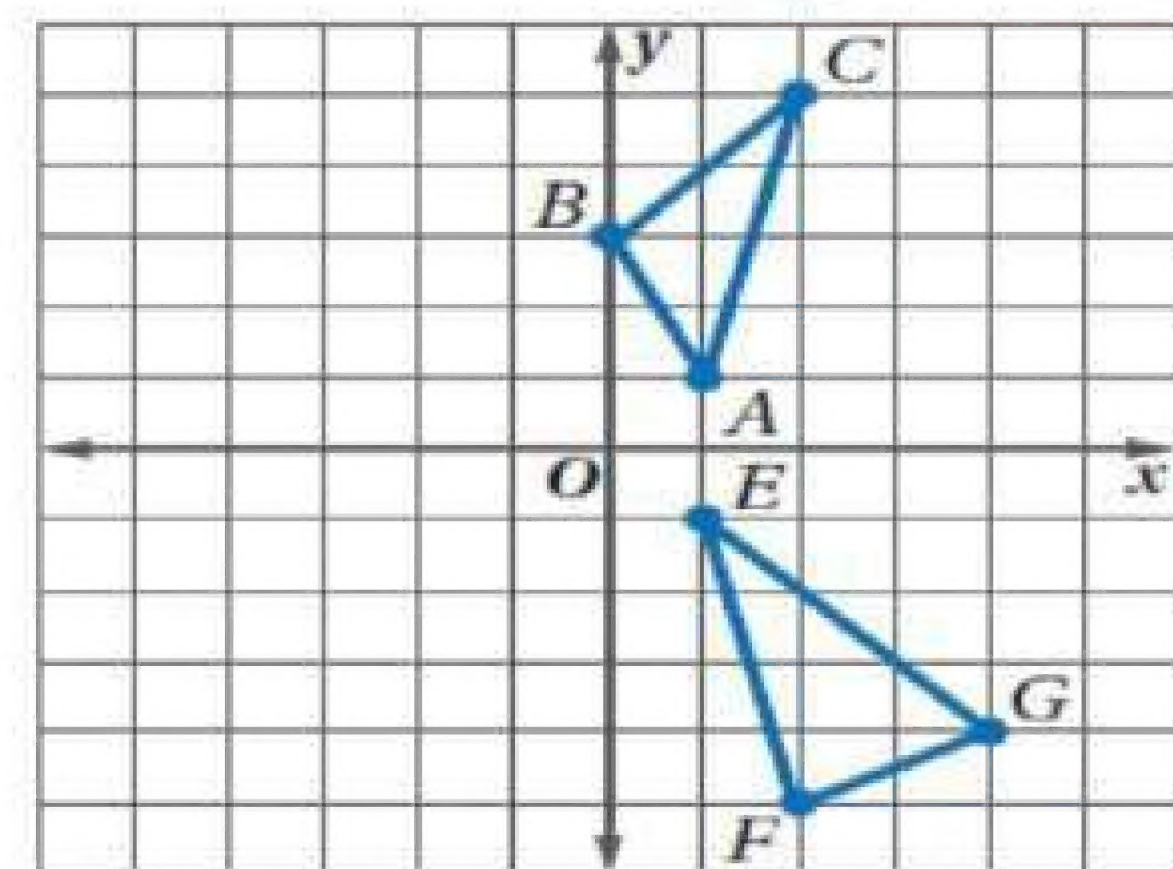
- (a) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.  
(b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفّر إجابتك.  
(c) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية لتدعم تخمينك في الجزء b.

### اقرأ سؤال الاختبار:

يُطلب إليك في هذه المسألة عمل ثلاثة أشياء؛ إذ يتعين عليك في الجزء a أن ترسم كلاً من  $\triangle ABC, \triangle EFG$  في مستوى إحداثي واحد. وفي الجزء b أن تضع تخمينًا يبين ما إذا كان  $\triangle ABC \cong \triangle EFG$  أم لا اعتمادًا على الرسم. وأخيرًا عليك في الجزء c أن تثبت صحة تخمينك.

### حل سؤال الاختبار:

- (b) يتضح من الرسم أن المثلثين مختلفان في الشكل؛ لذا يمكن أن نخمن أنهما ليسا متطابقين.







(c) استعمال صيغة المسافة لبيان أن أطوال بعض الأضلاع المتناظرة غير متساوية.

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(0-1)^2 + (3-1)^2} \\ &= \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EF &= \sqrt{(2-1)^2 + [-5-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(2-0)^2 + (5-3)^2} \\ &= \sqrt{4+4} = \sqrt{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} FG &= \sqrt{(4-2)^2 + [-4-(-5)]^2} \\ &= \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(2-1)^2 + (5-1)^2} \\ &= \sqrt{1+16} = \sqrt{17} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{(4-1)^2 + [-4-(-1)]^2} \\ &= \sqrt{9+9} = \sqrt{18} \end{aligned}$$

وبما أن  $AB = FG$ ,  $AC = EF$ , على حين أن  $BC \neq EG$ . فإن شروط مسلمة التطابق  $SSS$  غير متحققة؛ إذن  
 $\triangle ABC \not\cong \triangle EFG$ .

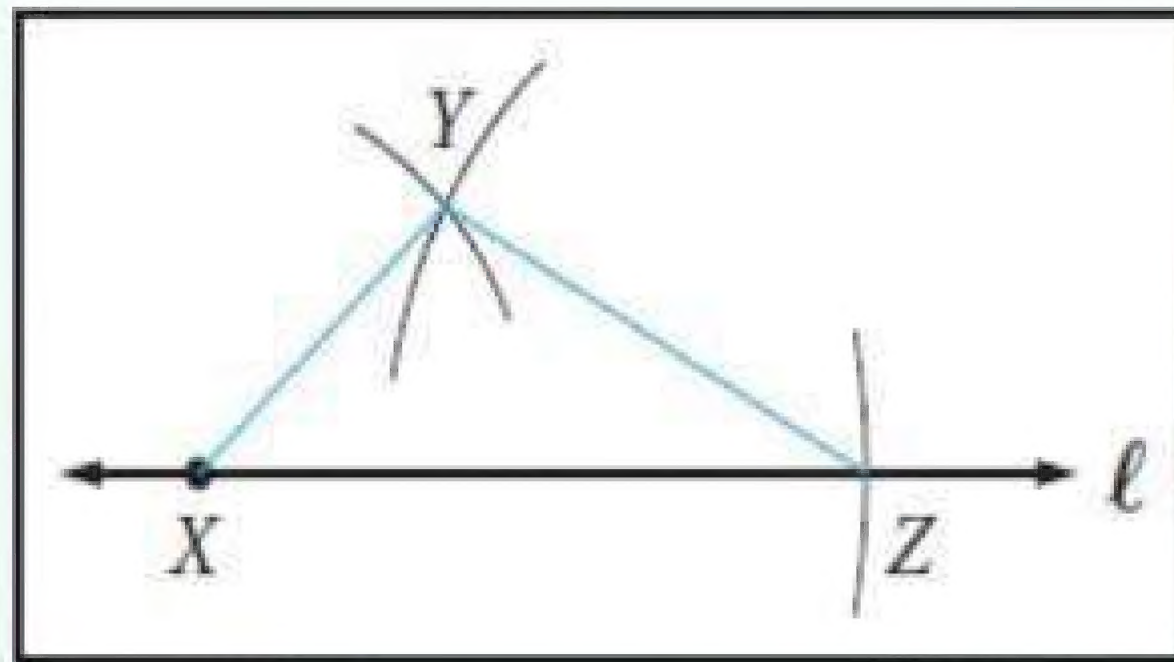
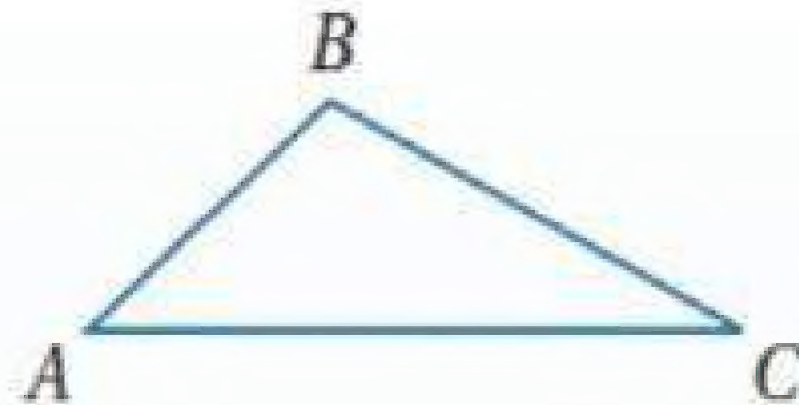


# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SSS$ , $SAS$ Proving Congruence— $SSS$ , $SAS$

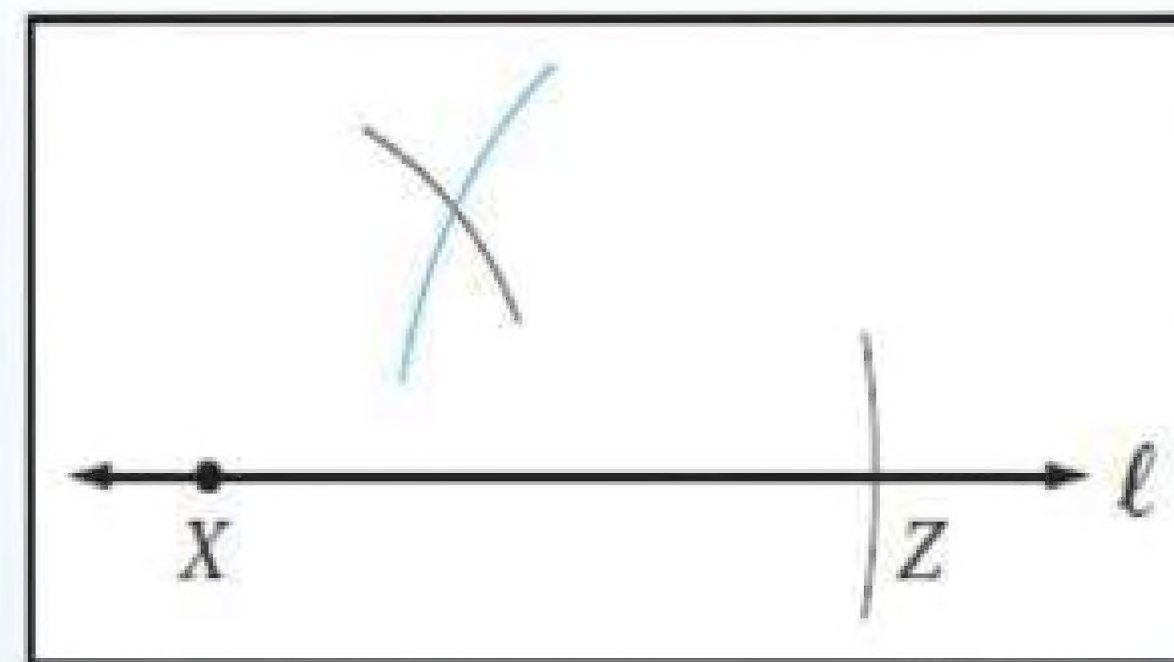
### إنشاء هندسي

إنشاء مثلث يطابق مثلثاً مرسوماً باستعمال الأضلاع ( $SSS$ )

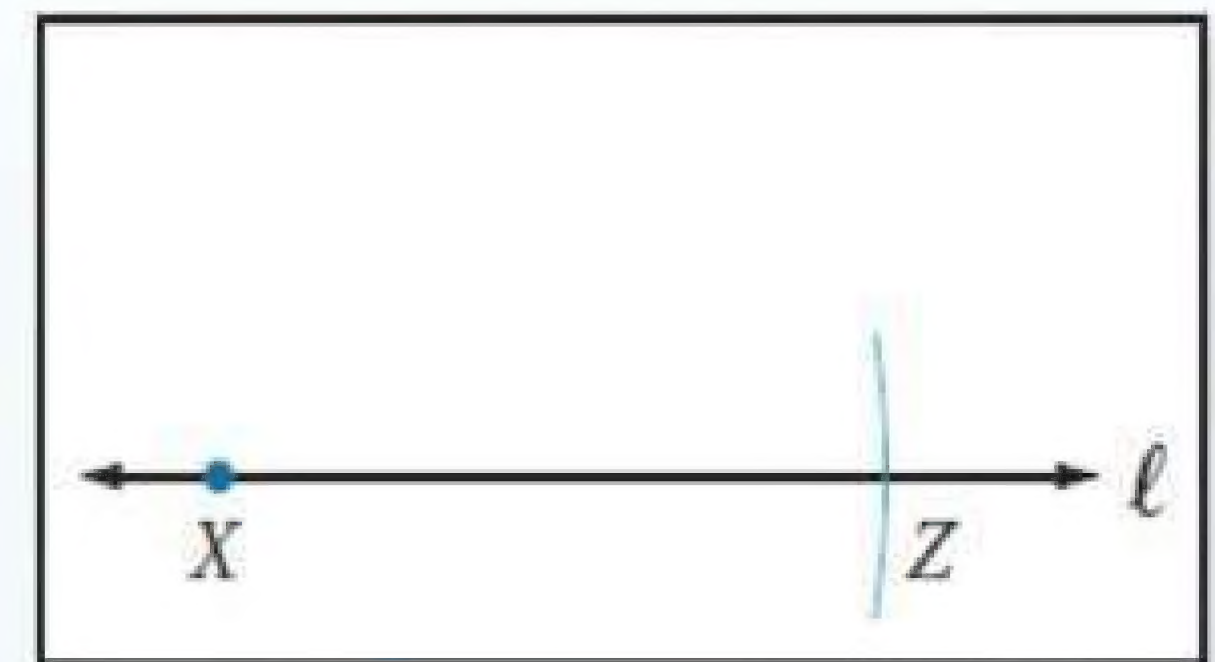
ارسم مثلثاً وسوّه  $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسطرة  $SSS$  لتنشئ  $\triangle XYZ$  الذي يطابق  $\triangle ABC$ .



**الخطوة 3** سمّ نقطة تقاطع القوسين  $Y$ . وارسم  $\overline{XY}$ ,  $\overline{ZY}$  لتشكّل  $\triangle XYZ$ .



**الخطوة 2** أنشئ قوساً طول نصف قطره  $AB$ ، ومركزه  $X$ ، وقوساً آخر طول نصف قطره  $BC$ ، ومركزه  $Z$ .



**الخطوة 1** عيّن النقطة  $X$  على المستقيم  $l$ . ثم أنشئ  $\overline{XZ} \cong \overline{AC}$  على  $l$  كما يأتي:

- ركز رأس الفرجار في النقطة  $A$ ، وافتحه حتى يصل القلم إلى النقطة  $C$ .

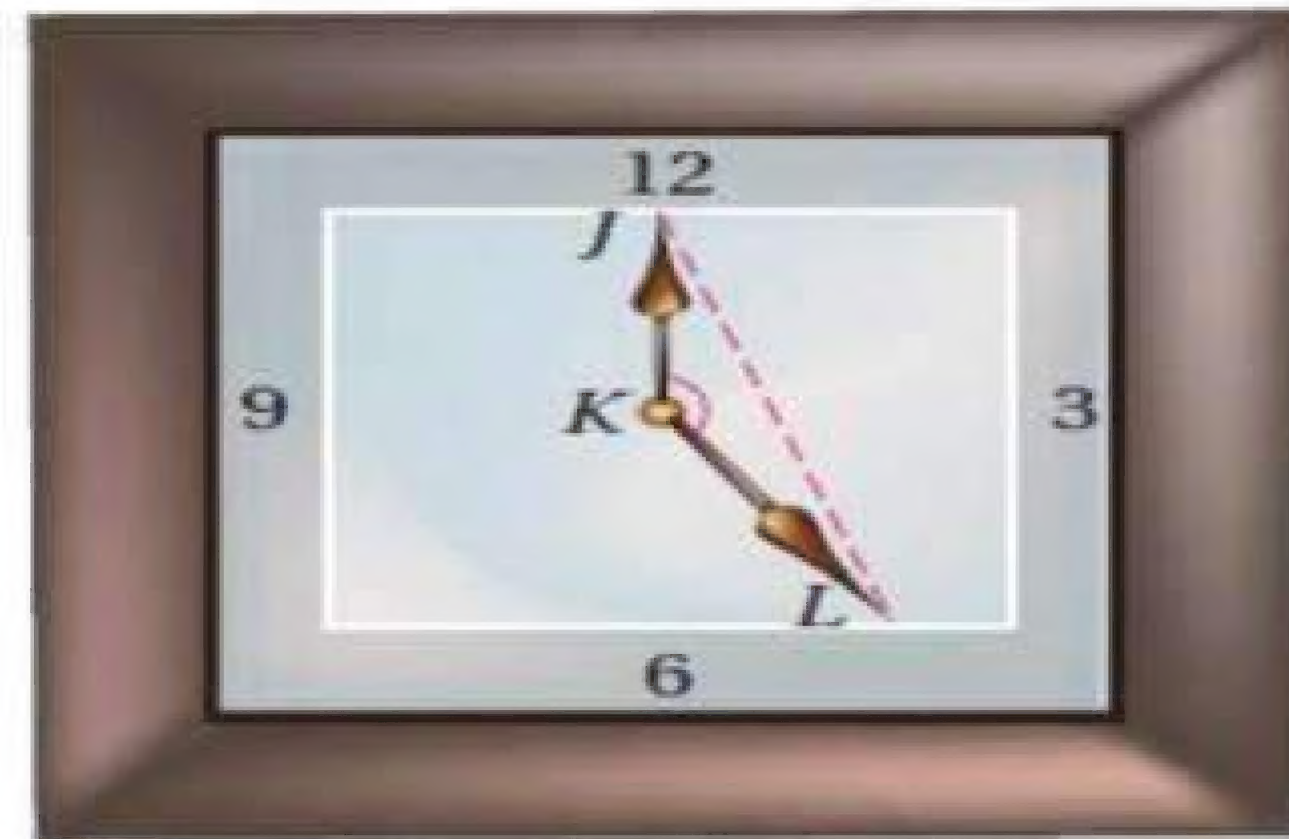
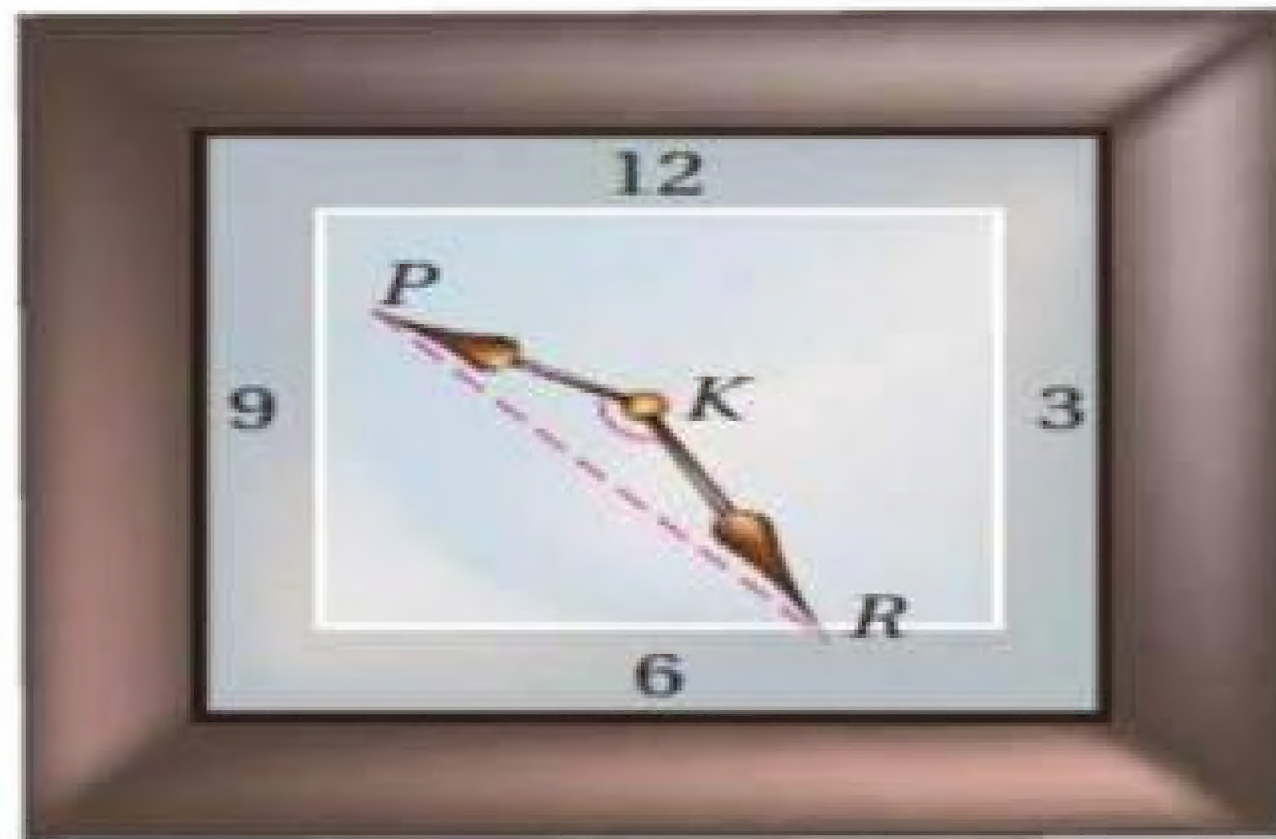
- باستعمال فتحة الفرجار نفسها ركز رأس الفرجار في  $X$  وارسم قوساً يقطع المستقيم  $l$  وسم نقطة التقاطع  $Z$ .



## ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SAS$ , $SSS$ Proving Congruence— $SSS$ , $SAS$

### الفصل الثالث

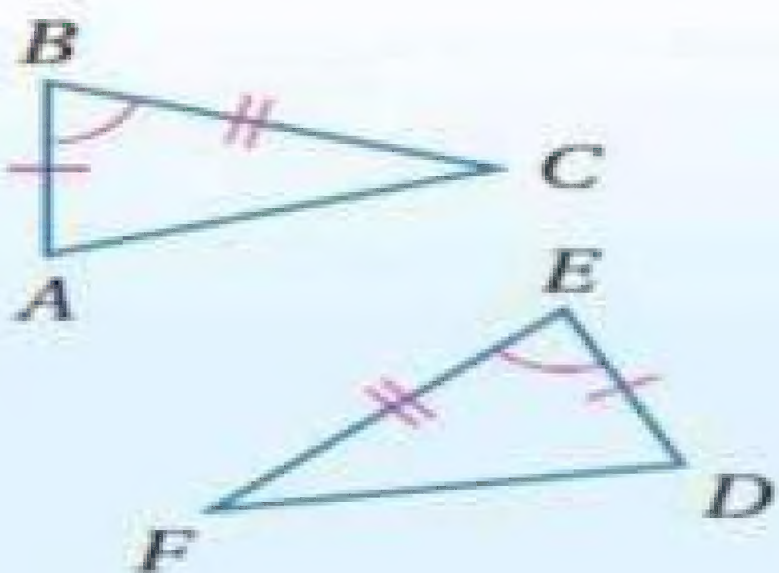
**المسلمة  $SAS$ :** تُسمى الزاوية المتكونة من ضلعين متجاورين لمضلع **زاوية محصورة**. تأمل الزاوية المحصورة  $JKL$  والمتكونة من عقربي الساعة الأولى. وكلما شكّل العقربان زاوية لها القياس نفسه، فستكون المسافتان بين طرفي العقربين  $\overline{JL}$ ,  $\overline{PR}$  متساويتين.



$$\triangle PKR \cong \triangle JKL$$

أي مثلثين يتكونان من زوجين من الأضلاع المتساوية في الطول وزاويتين محصورتين متساويتين في القياس يكونان متطابقين. وهذا يوضح المسلمة الآتية:

أضف إلى  
مطويتك



### المسلمة 3.2 التطابق بضلع - زاوية - ضلع ( $SAS$ )

التعبير اللفظي: إذا طابق ضلعان وزاوية محصورة بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

إذا كان،  $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ ,

$\angle B \cong \angle E$ ,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ,

فإن  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

مثال:

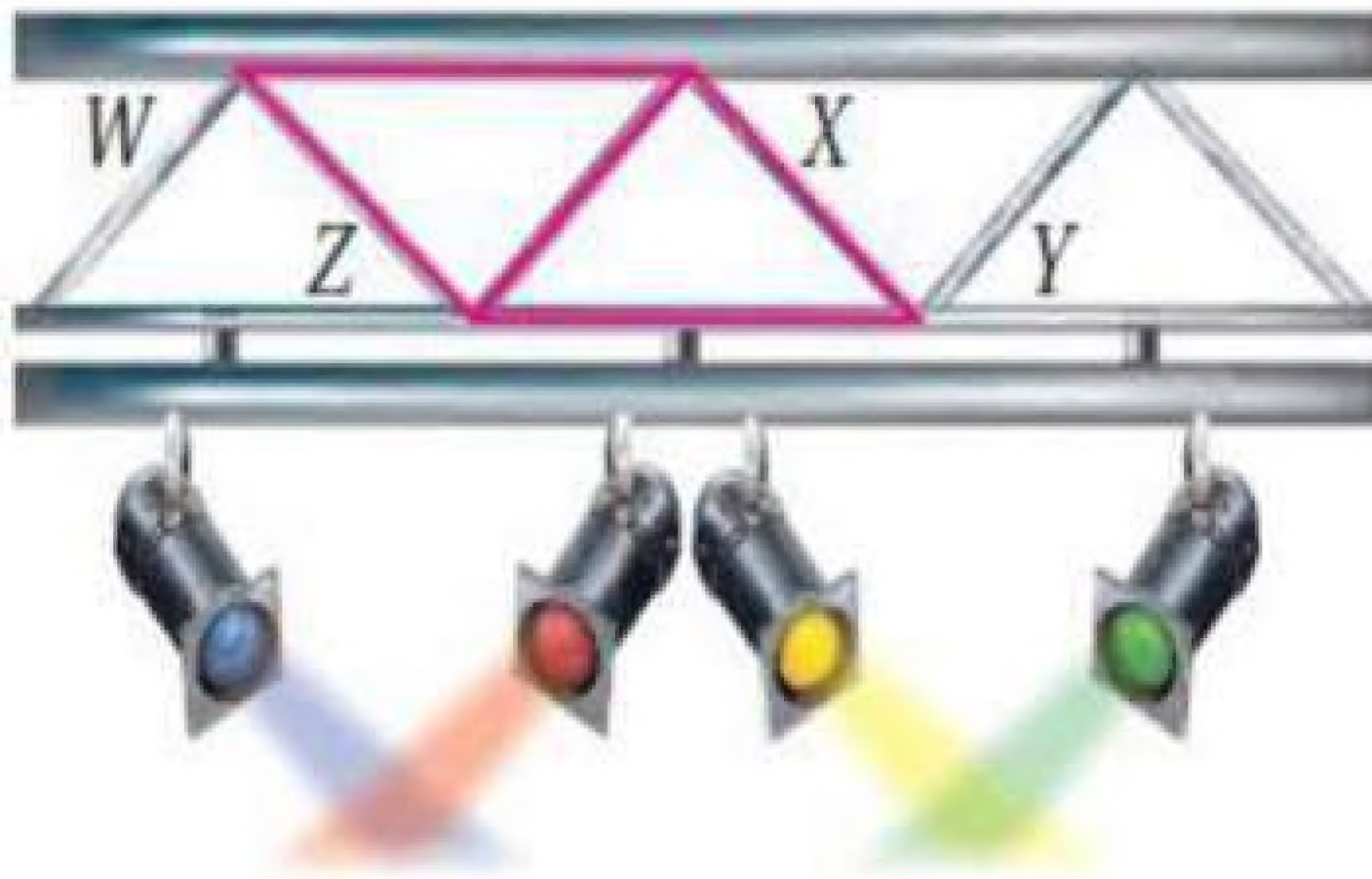
الفصل الثالث



# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SSS, SAS$ Proving Congruence— $SSS, SAS$

استعمال  $SAS$  لإثبات تطابق المثلثات

مثال 3 من واقع الحياة



**إضاءة:** تبدو دعائم السقالة حاملة المصابيح الظاهرة في الصورة وكأنها مكونة من مثلثات متطابقة. فإذا كان  $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$ ,  $\overline{WZ} \cong \overline{YX}$ , فاكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن:  $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$ .

البرهان:



الربط مع الحياة

**فنيو الإضاءة:** في صناعة الصور المتحركة يقوم فنيو الإضاءة بتحديد مواقع المصابيح التي يتطلبها الفيلم. ويقوم هؤلاء الفنيون بالتأكد من أن الزوايا التي يشكلها الضوء في مواضعها الصحيحة.

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\overline{WZ} \cong \overline{YX}$
(2) معطى	(2) $\overline{WX} \parallel \overline{ZY}$
(3) نظرية الزوايا الداخلية المتبادلة	(3) $\angle WXZ \cong \angle XZY$
(4) خاصية الانعكاس للتطابق	(4) $\overline{XZ} \cong \overline{ZX}$
	(5) $\triangle WXZ \cong \triangle YZX$

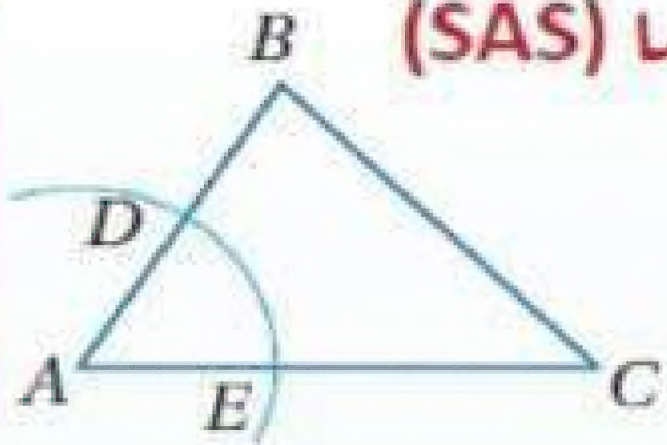


# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتين: SAS, SSS Proving Congruence—SAS, SAS

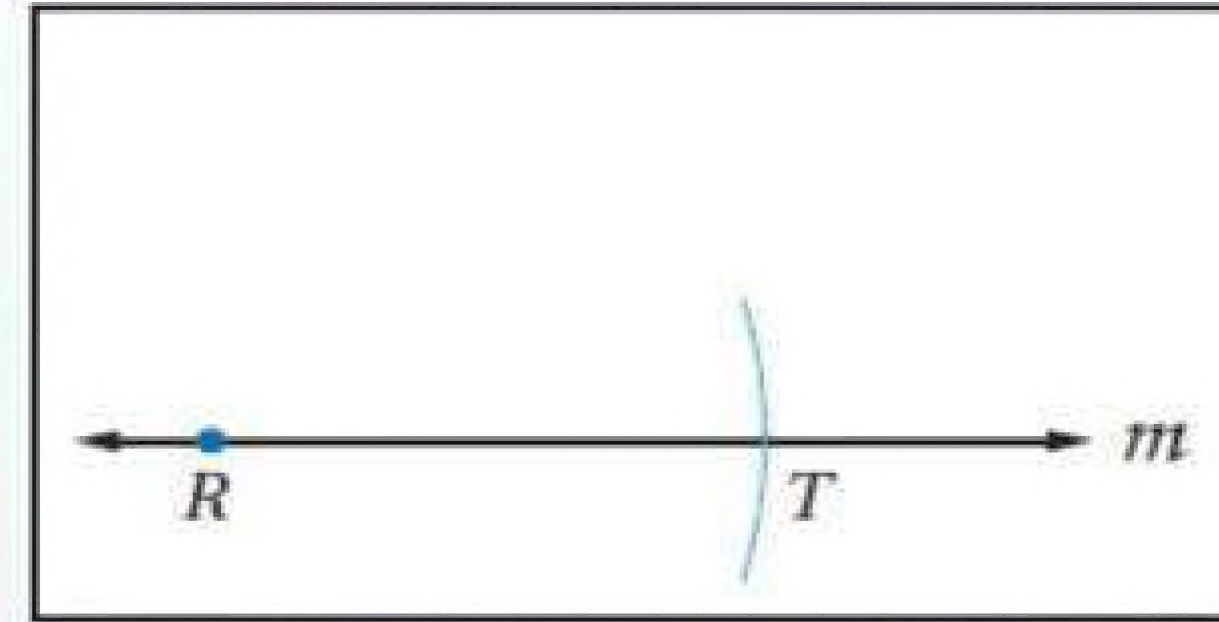
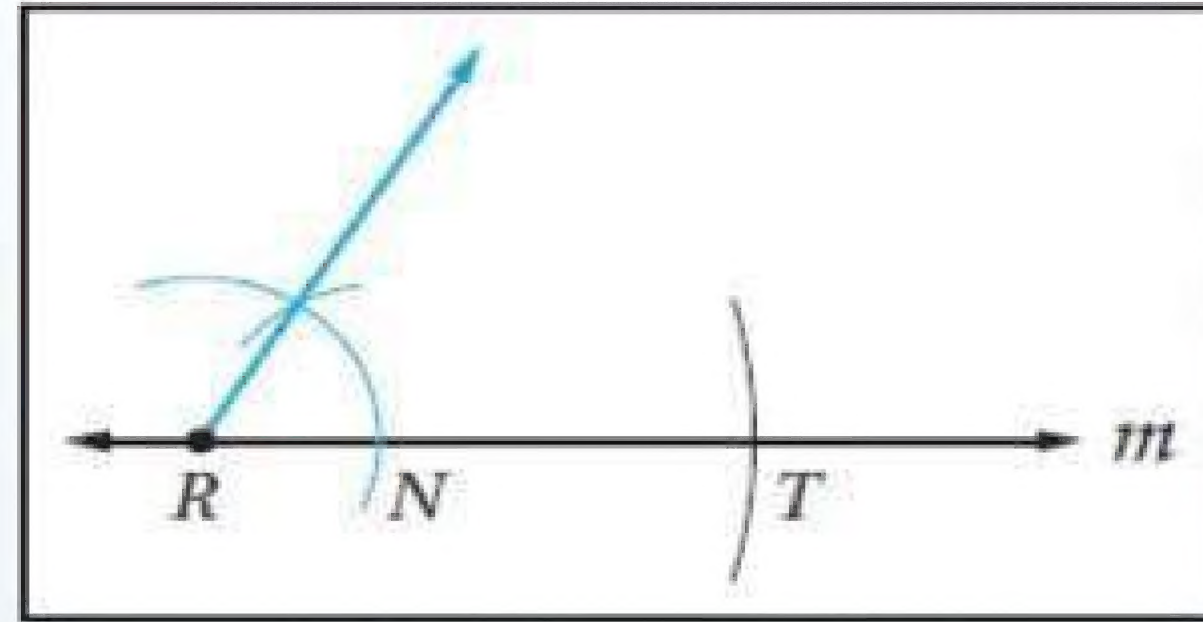
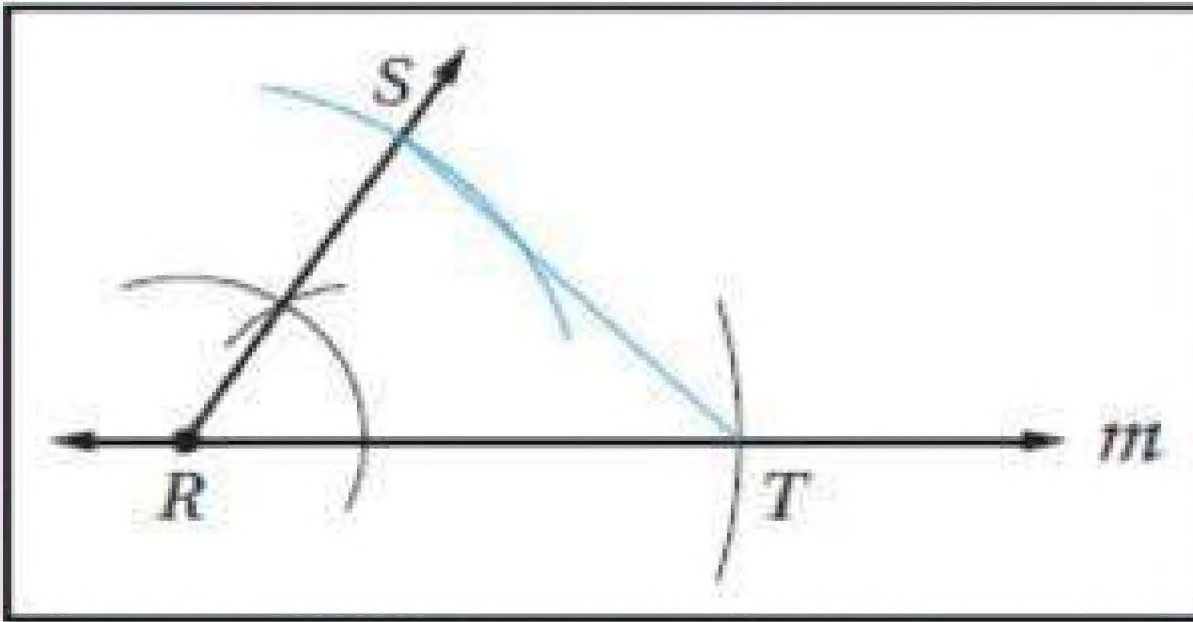
## الفصل الثالث

### إنشاء هندسي

إنشاء مثلث مطابق مثلثاً مرسومًا باستعمال ضلعين والزاوية المحصورة بينهما (SAS)



رسم مثلثاً وسمّه  $\triangle ABC$ ، ثم استعمل المسطرة SAS لتنشئ  $\triangle RST$  الذي يطابق  $\triangle ABC$ .



**الخطوة 3:** أنشئ  $\overline{RS} \cong \overline{AB}$ ، ثم ارسم  $\overline{ST}$  لتشكّل  $\triangle RST$ .

- الخطوة 2:** أنشئ  $\angle R \cong \angle A$ ، باستعمال  $\overline{RT}$  ضلعاً للزاوية، والنقطة  $R$  رأساً لها كما يأتي:
- ضع رأس الفرجار على النقطة  $A$ ، وارسم قوساً يقطع ضلعي  $\angle A$ . سمّ نقطتي التقاطع  $D, E$ .
  - باستعمال فتحة الفرجار نفسها، ضع رأس الفرجار عند  $R$  وارسم قوساً يبدأ فوق المستقيم  $m$  ويقطعه، سمّ نقطة التقاطع  $N$ .
  - ضع رأس الفرجار عند  $E$  وعدّل الفتحة حتى يصل رأس القلم إلى  $D$ .
  - دون تغيير فتحة الفرجار، ضع رأس الفرجار عند النقطة  $N$ ، وارسم قوساً يقطع القوس الذي رسمته سابقاً.

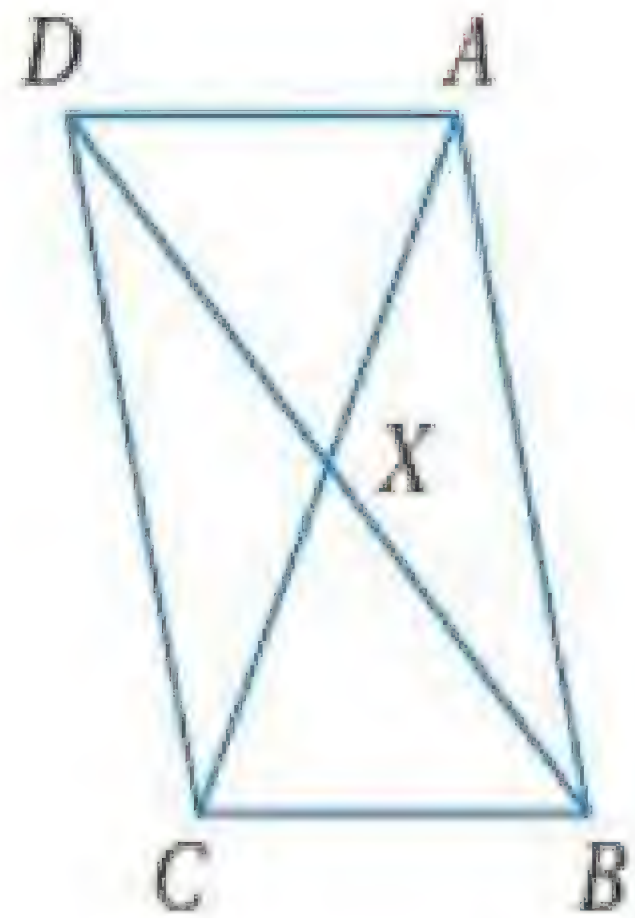
**الخطوة 1:** عيّن النقطة  $R$  على المستقيم  $m$ . ثم أنشئ  $\overline{RT} \cong \overline{AC}$  على  $m$ .



# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SAS$ , $SSS$ Proving Congruence— $SAS$ , $SAS$

## مثال 4

استعمال تطابق المثلثين بضلعين وزاوية محصورة  $SAS$  في البراهين



اكتب برهاناً تسلسلياً لما يلي.

المعطيات:  $X$  منتصف  $\overline{BD}$

و  $X$  منتصف  $\overline{AC}$

المطلوب:  $\triangle DXC \cong \triangle BXA$

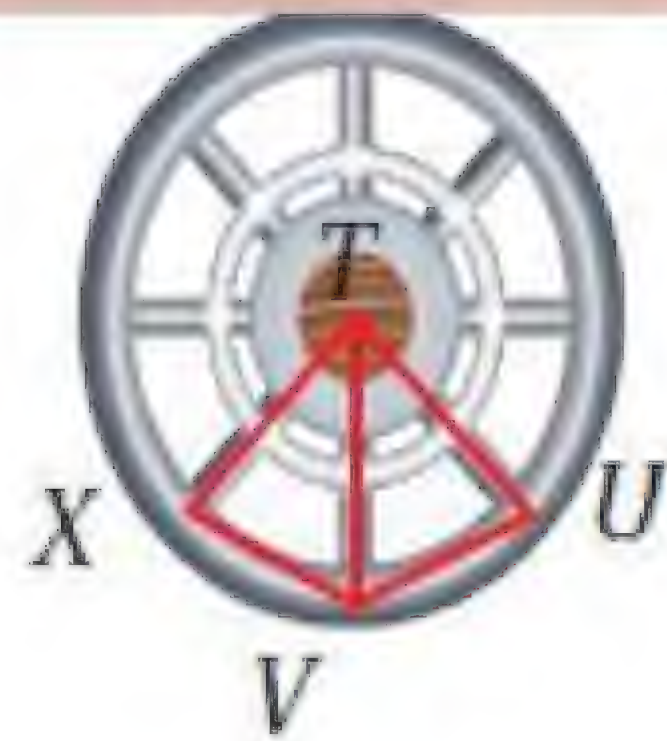
البرهان:

### إرشادات للدراسة

البراهين التسلسلية  
يمكن كتابة البراهين  
التسلسلية إما رأسياً أو  
أفقياً.







(4) قضبان الإطار الداخلية تقسمه إلى ثمانية أجزاء. إذا كان  $\angle XTV \cong \angle UTV$  و  $\overline{TU} \cong \overline{TX}$ ، فبين أن  $\triangle XTV \cong \triangle UTV$ .

(4) المعطيات:  $\overline{TU} \cong \overline{TX}$

$$\angle XTV \cong \angle UTV$$

المطلوب:  $\triangle XTV \cong \triangle UTV$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\angle XTV \cong \angle UTV, \overline{TU} \cong \overline{TX}$
(2) خاصية الانعكاس	(2) $\overline{TV} \cong \overline{TV}$
(3) SAS	(3) $\triangle XTV \cong \triangle UTV$



# ٣-٤ إثبات التطابق في حالتى: $SSS, SAS$ Proving Congruence— $SSS, SAS$

لا تأكد

المثال ١

الحل



(١) الخداع البصري، في الشكل المقابل المربع  $ABCD$  يطابق المربعات الثلاثة الأخرى التي تشكل النمط.

(a) ما عدد المثلثات المختلفة القياس التي استعملت لعمل هذا النمط؟

عدد المثلثات المختلفة = 2

(b) استعمل مسلمة التطابق  $SSS$  لإثبات أن  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ .

$$AB = CD, DA \cong BC \quad (1)$$

(معطيات)

$$AB \cong CD, DA \cong BC \quad (2)$$

(تعريف تطابق القطع المستقيمة)

$$CA \cong AC \quad (3)$$

(خاصية الانعكاس في التطابق)

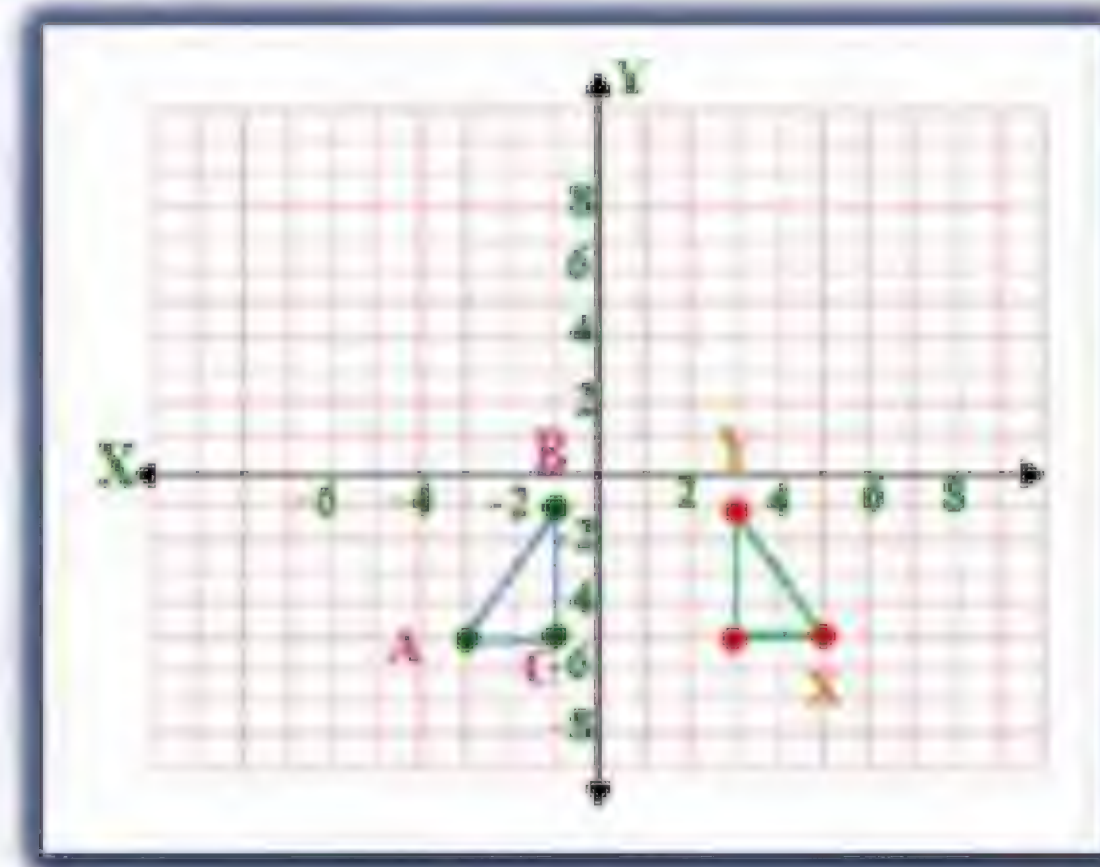
$$\triangle ABC \cong \triangle CDA \quad (SSS) \quad (4)$$



(2) **إجابة مطولة** : إحداثيات رؤوس  $\triangle ABC$  هي:  
 $A(-3, -5)$ ,  $B(-1, -1)$ ,  $C(-1, -5)$   
 ورؤوس  $\triangle XYZ$  هي  
 $X(5, -5)$ ,  $Y(3, -1)$ ,  $Z(3, -5)$

المثال ٢

(a) مثل كلا المثلثين في مستوى إحداثي واحد.



(b) استعمل هذا التمثيل لتخمين ما إذا كان المثلثان متطابقين أم لا. وفّر إجابتك.

يبدو من الشكل أن للمثلثين الشكل نفسه والقياس نفسه لذلك  
 يمكن أن نؤمن أن المثلثين متطابقان





(c) اكتب برهانًا منطقيًا باستعمال الهندسة الإحداثية يدعم تخمينك في الفرع b.



### أطوال $\Delta XYZ$

$$X(5, -5), Y(3, -1)$$

$$d_{(XY)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (-1 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$Y(3, -1), Z(3, -5)$$

$$d_{(YZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + (-5 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$X(5, -5), Z(3, -5)$$

$$d_{(XZ)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 5)^2 + (-5 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 0} = 2$$

$$XY = \sqrt{20}, YZ = 4, XZ = 2$$

### أطوال $\Delta ABC$

$$A(-3, -5), B(-1, -1)$$

$$d_{(AB)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-1 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

$$B(-1, -1), C(-1, -5)$$

$$d_{(BC)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + (-5 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{0 + 16} = \sqrt{16} = 4$$

$$A(-3, -5), C(-1, -5)$$

$$d_{(AC)} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - (-3))^2 + (-5 - (-5))^2}$$

$$\sqrt{4 + 0} = \sqrt{4} = 2$$

$$AB = \sqrt{20}, BC = 4, AC = 2$$

لاحظ أن  $XY = AB$ ,  $YZ = BC$ ,  $XZ = AC$  ومن تعريف التطابق القطع المستقيمة نستنتج أن القطع المتناظرة جميعها متطابقة. وعليه، فإن  $\Delta XYZ \cong \Delta ABC$  حسب SSS





(3) **رياضة:** في الشكل المجاور، إذا كان:  
 $\Delta MOP, \overline{LP} \cong \overline{NO}, \angle LPM \cong \angle NOM$   
 حرّا لإثبات أن  $\Delta LMP \cong \Delta NMO$ .  
 فاكتب برهاناً

المثال ٣

الحل

نعلم أن  $\overline{LP} \cong \overline{NO}, \angle LPM \cong \angle NOM$   
 وبما أن  $\Delta MOP$  متطابق الأضلاع  
 فإن  $\overline{MO} \cong \overline{MP}$   
 من تعريف المثلث المتطابق الأضلاع  
 ولذلك فإن  $\Delta LMP \cong \Delta NMO$   
 حسب مسطرة التطابق SAS



(4) اكتب برهاناً ذا عمودين.  
 المعطيات:  $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$   
 المطلوب:  $\overline{BC} \cong \overline{DA}$

المثال ٤

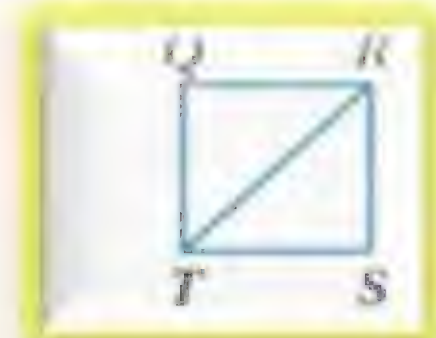
الحل

(1)  $\overline{BA} \cong \overline{DC}, \angle BAC \cong \angle DCA$  (معطيات)  
 (2)  $\overline{AC} \cong \overline{CA}$  (خاصية الانعكاس للتطابق)  
 (3)  $\Delta BCA \cong \Delta DAC$  (SAS)  
 (4)  $\overline{BC} \cong \overline{DA}$  (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة)



برهان: اكتب برهاناً من النوع المذكور في كل  
من الصورتين الآتيتين:

المثال 1



(5) برهان حرّ

المعطيات:  $\overline{QR} \cong \overline{SR}$

$\overline{ST} \cong \overline{QT}$

المطلوب:  $\triangle QRT \cong \triangle SRT$

الحل

(6) برهان ذو عمودين

المعطيات:  $\overline{AB} \cong \overline{ED}$ ,  $\overline{CA} \cong \overline{CE}$

$\overline{AC}$  تنصف  $\overline{BD}$

المطلوب:  $\triangle ABC \cong \triangle EDC$



$QR = SR$ ,  $ST = QT$   
 $RT = RT$  حسب خاصية الانعكاس  
 $\triangle QRT \cong \triangle SRT$  حسب SSS

الحل

$AB = ED$ ,  $CA = CE$

$AC$  تنصف  $BD$

$C$  منتصف  $BD$

$BC = CD$

$\triangle ABC \cong \triangle EDC$  حسب SSS





(7) **جسور:** جسر الرياض المعلق طوله 763 m، وهو مثبت بحبال معدنية معلقة بدعامتين خرسائيتين. كما هو مبين بالشكل، بحيث يلتقي الحبلان المعدنيان العلويان في النقطة C عند منتصف المسافة بين الدعامتين، إذا كانت  $AB = ED$ : فأثبت أن المثلثين المبيّنين في الشكل المجاور متطابقان.

(1)  $AB \cong ED$ ،  $\angle ABC \cong \angle EDC$  قائمتان،

C نقطة منتصف BD (معطيات)

(2)  $\angle ABC \cong \angle EDC$  (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(3)  $CD \cong BC$  (نظرية نقطة المنتصف)

(4)  $\triangle CDE \cong \triangle ABC$  حسب (SAS)

الحل

حدد ما إذا كان  $\triangle MNO \cong \triangle QRS$  في كل من السؤالين الآتيين:

(8)  $M(2, 5), N(5, 2), O(1, 1), Q(-4, 4), R(-7, 1), S(-3, 0)$

المثال ٢

$Q(-4, 4), R(-7, 1)$

$$d_{QR} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-7 - (-4))^2 + (1 - 4)^2}$$

$$\sqrt{9 + 9} = \sqrt{18}$$

$\triangle QRS$

الحل





$$Q(-4,4), S(-3,0)$$

$$d_{QS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - (-4))^2 + (0 - 4)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$$

$$R(-7,1), S(-3,0)$$

$$d_{RS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-3 - (-7))^2 + (0 - 1)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

**$\Delta MNO$**

$$N(5,2), O(1,1)$$

$$d_{NO} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 5)^2 + (1 - 2)^2}$$

$$\sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$M(2,5), N(5,2)$$

$$d_{MN} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(5 - 2)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$\sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

$$M(2,5), O(1,1)$$

$$d_{MO} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - 2)^2 + (1 - 5)^2}$$

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$MN = \sqrt{18}, NO = \sqrt{17}, MO = \sqrt{17}$$

$$QR = \sqrt{18}, RS = \sqrt{17}, QS = \sqrt{17}$$

بما أن كل زوج من الأضلاع المتناظرة متساويان في الطول فإنهما متطابقان إذن

**$\Delta QRS \cong \Delta MNO$  حسب SSS**



$$M(0, -1), N(-1, -4), O(-4, -3), Q(3, -3), R(4, -4), S(3, 3) \quad (9)$$



**$\Delta MNO$**

$$M(0, -1), N(-1, -4)$$

$$d_{MN} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-1 - 0)^2 + (-4 - (-1))^2}$$

$$\sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

$$N(-1, -4), O(-4, -3)$$

$$d_{NO} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - (-1))^2 + (-3 - (-4))^2}$$

$$\sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

$$M(0, -1), O(-4, -3)$$

$$d_{MO} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4 - 0)^2 + (-1 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{16 + 4} = \sqrt{20}$$

$$MN = \sqrt{10}, NO = \sqrt{10}, MO = \sqrt{20}$$

**$\Delta QRS$**

$$Q(3, -3), R(4, -4)$$

$$d_{QR} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(4 - 3)^2 + (-4 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$R(4, -4), S(3, 3)$$

$$d_{RS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 4)^2 + (3 - (-4))^2}$$

$$\sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

$$Q(3, -3), S(3, 3)$$

$$d_{QS} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(3 - 3)^2 + (3 - (-3))^2}$$

$$\sqrt{0 + 36} = 6$$

$$QR = \sqrt{2}, RS = \sqrt{50}, QS = 6$$

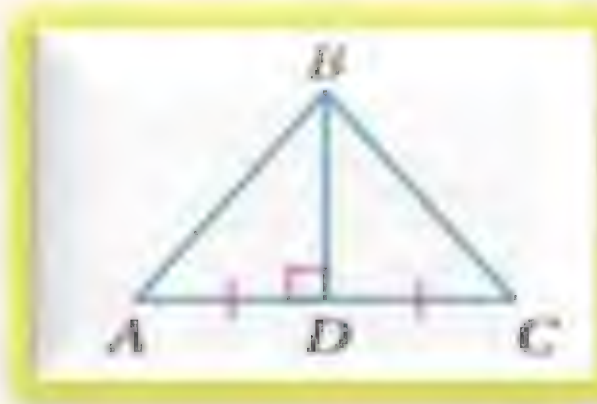
بما أن الأضلاع المتناظرة ليست متطابقة، فإن المثلثين ليسا متطابقين



### المثال ٣

برهان: اكتب برهاناً من النوع المحدد في كل من السؤالين الآتيين:

(10) برهان ذو عمودين



المعطيات:  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ,

$\overline{BD}$  تنصف  $\overline{AC}$

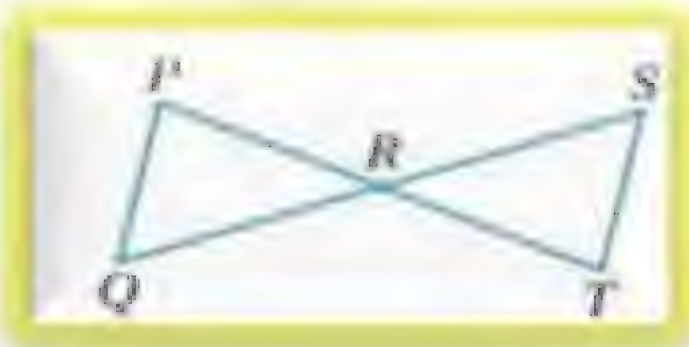
المطلوب:  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$

(11) برهان حرّ

المعطيات:  $R$  نقطة المنتصف لكل من

$\overline{QS}$ ,  $\overline{PT}$

المطلوب:  $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$



(1)  $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ ,  $\overline{BD}$  تنصف  $\overline{AC}$  (معطيات)

(2)  $\angle BDA, \angle BDC$  قائمتان (تعريف التعامد)

(3)  $\angle BDA \cong \angle BDC$  (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(4)  $\overline{AD} \cong \overline{DC}$  (تعريف منتصف القطعة المستقيمة)

(5)  $\overline{BD} \cong \overline{BD}$  (خاصية الانعكاس للتطابق)

(6)  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$  حسب مسلمة (S.A.S)

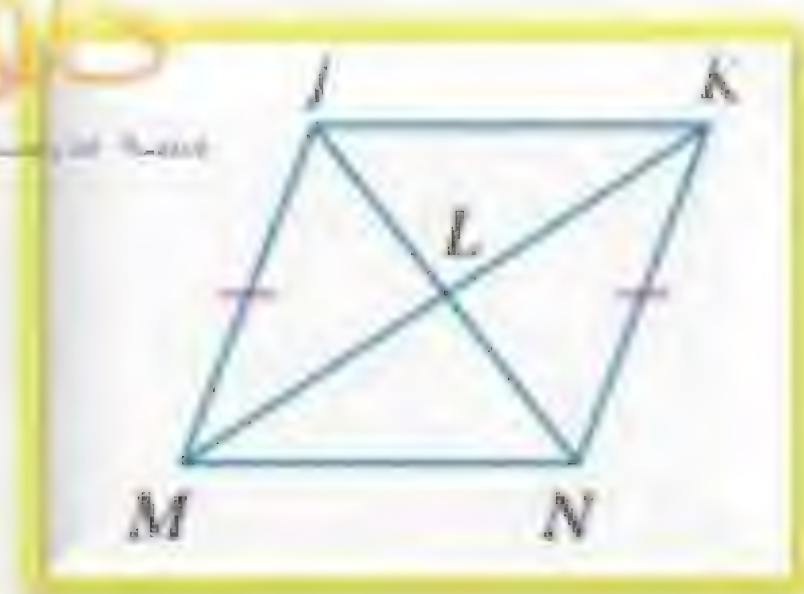
بما أن  $R$  نقطة المنتصف لكل من  $\overline{QS}$ ,  $\overline{PT}$ ، فإن  $\overline{PR} \cong \overline{RT}$

و  $\overline{RQ} \cong \overline{RS}$  من تعريف نقطة المنتصف، وكذلك  $\angle PRQ \cong \angle TRS$  بحسب

نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس

إن  $\triangle PRQ \cong \triangle TRS$  حسب مسلمة (S.A.S)

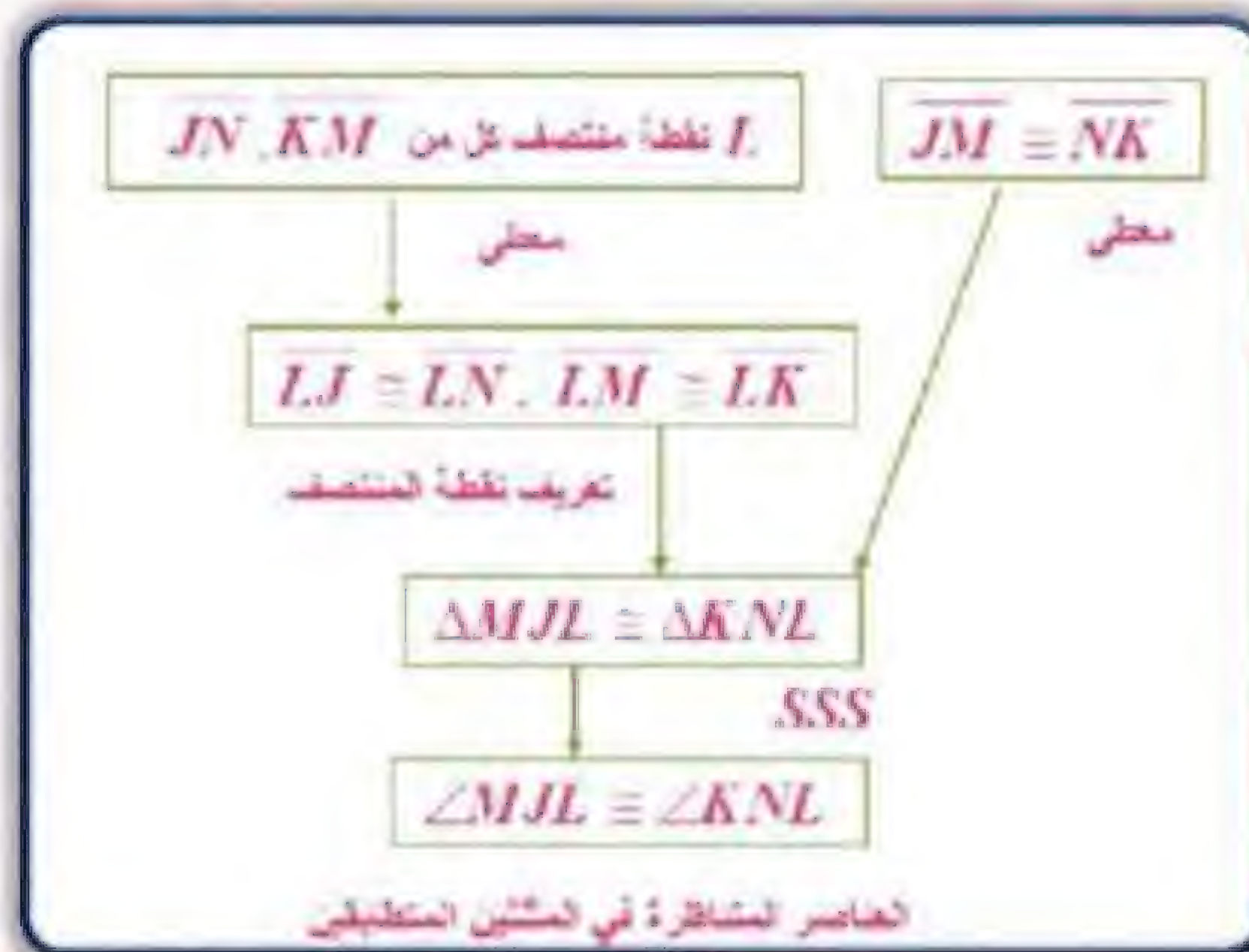




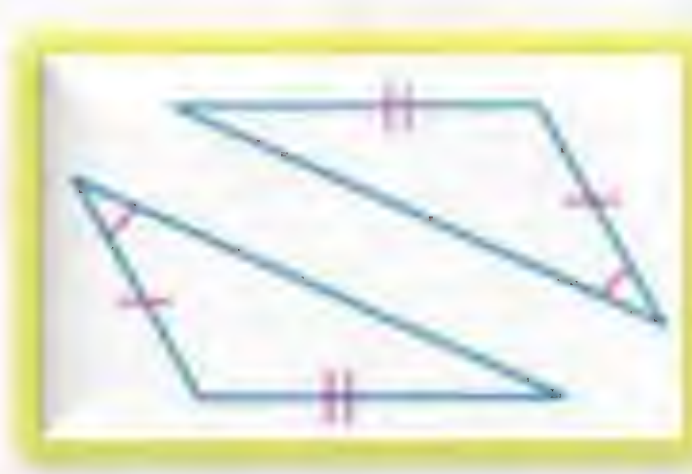
(12) برهان، اكتب برهاناً تسلسلياً  
المعطيات،  $\overline{JM} \cong \overline{NK}$ ،  $L$  نقطة المنتصف  
لكل من  $\overline{JN}$ ،  $\overline{KM}$   
المطلوب،  $\angle MJL \cong \angle KNL$

المثال ٤

الحل



حدد ما إذا كان المثلثين في كل من الأسئلة الآتية متطابقين أم لا وضع إجابتك.



الحل

متطابقين (مسألة SAS)

لا يوجد تطابق

متطابقين (مسألة SSS)





(16) إشارة تحذيرية، استعمل الشكل المجاور.

(a) ما اسم المجسم الذي تمثله إشارة التحذير.

الجل

**المجسم يسمى : هرم**

(b) إذا كان  $\overline{AB} \cong \overline{AD}$  ,  $\overline{CB} \cong \overline{CD}$  , فأثبت أن  $\triangle ACB \cong \triangle ACD$ .

(1)  $\overline{AB} \cong \overline{AD}$  و  $\overline{CB} \cong \overline{DC}$  (معطيات)

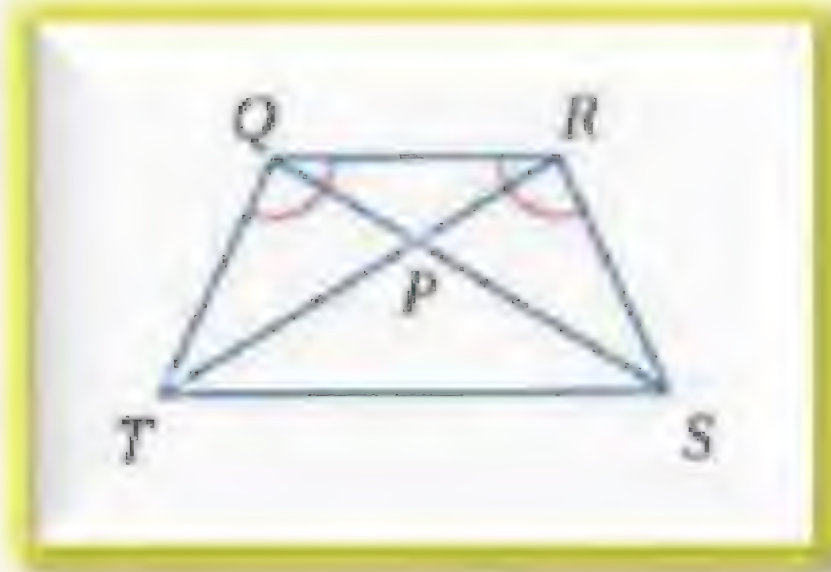
(2)  $\overline{AC} \cong \overline{AC}$  (خاصية الانعكاس للنقاط)

(3)  $\triangle ACB \cong \triangle ACD$  حسب مسلمة (SSS)

(c) لماذا يبدو المثلثان غير متطابقين في الشكل؟

**المجسم ثلاثي الابعاد ولذلك عندما يتم رسمه في  
المستوي الثنائي الابعاد فان الرسم المنظوري يجعله  
يبدو وكأن المثلثين مختلفان.**





(17) برهان، اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات،  $\triangle TPQ \cong \triangle SPR$

$\angle TQR \cong \angle SRQ$

المطلوب،  $\triangle TQR \cong \triangle SRQ$







(18) في الشكل المجاور ABCD مزرعة مربعة الشكل، ويريد أخوان فصلها باستعمال سياج على أحد القطرين.

(a) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن  $BD = AC$ .

- (1)  $CB \cong BA \cong AD \cong DC$  (معطيات)
- (2)  $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$  قوائم (معطيات)
- (3)  $\angle CDA \cong \angle BCD$  (جميع الزوايا القوائم متطابقة)
- (4)  $\triangle BCD \cong \triangle CDA$  حسب مسلمة (SAS)
- (5)  $DB \cong AC$  (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)



(b) اكتب برهاناً ذا عمودين لإثبات أن  $\angle BDC \cong \angle BDA$ .

- (1)  $CB \cong BA \cong AD \cong DC$  (معطيات)
  - (2)  $\angle CBA, \angle BAD, \angle ADC, \angle DCB$  قوائم (معطيات)
  - (3)  $\angle BAD \cong \angle BCD$  (جميع الزوايا القوائم متطابقة)
  - (4)  $\triangle BCD \cong \triangle DBAD$  حسب مسلمة (SAS)
  - (5)  $\angle BDC \cong \angle BDA$
- العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة

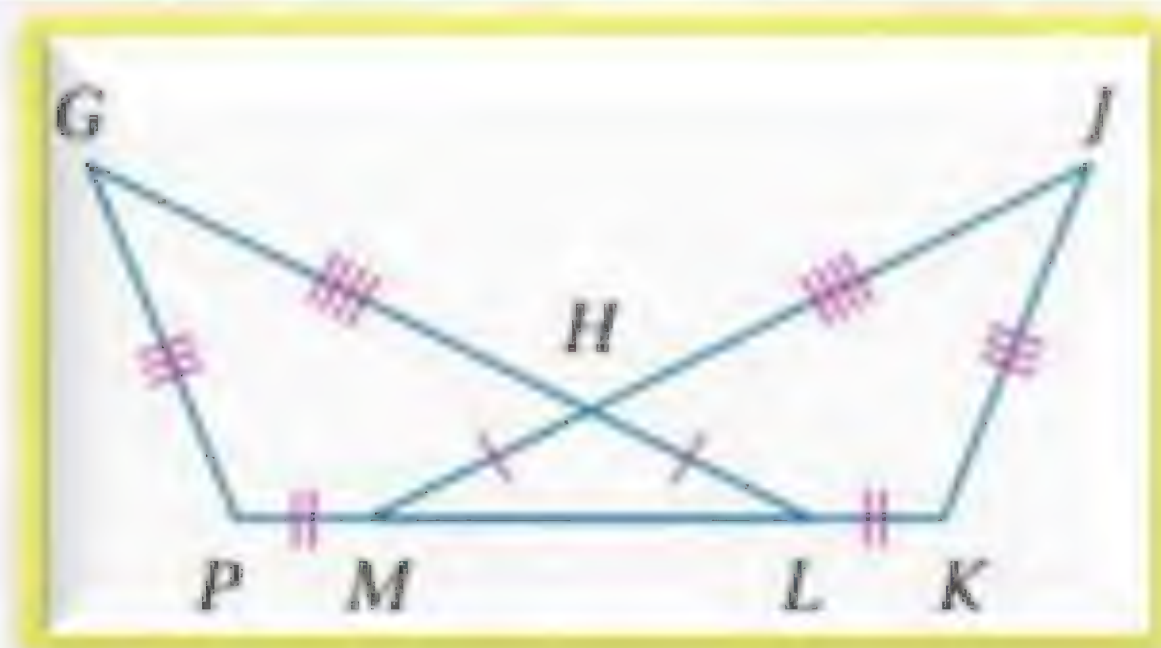


(20) برهان، اكتب برهانًا آخرًا.

المعطيات،  $\overline{HL} \cong \overline{HM}$ ,  $\overline{PM} \cong \overline{KL}$ ,

$\overline{PG} \cong \overline{KJ}$ ,  $\overline{GH} \cong \overline{JH}$

المطلوب،  $\angle G \cong \angle J$



$GH = JH$ ,  $PG = KJ$ ,  $HL = HM$ ,  $PM = KL$

بما أن  $HL = HM$  و  $GH = JH$  إذن  $GL = JM$

بما أن  $PM = KL$ ,  $GL = JM$  إذن  $PL = KM$

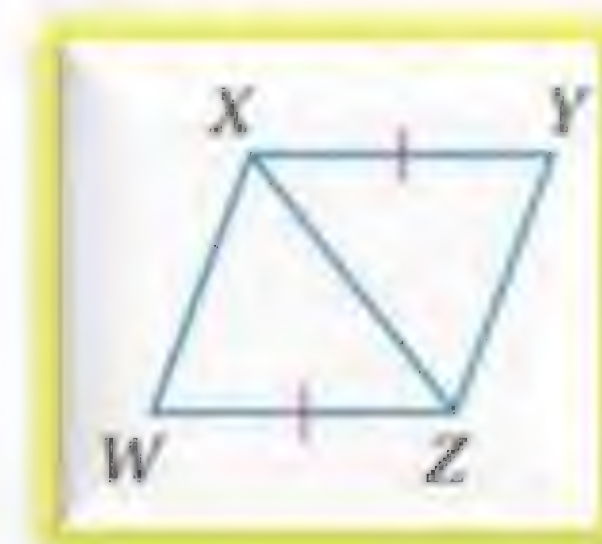
إذن  $\triangle GPL \cong \triangle JKM$

إذن  $\angle G \cong \angle J$

(19) برهان، اكتب برهانًا ذا عمودين.

المعطيات،  $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$ ,  $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

المطلوب،  $\triangle YXZ \cong \triangle WZX$



الحل

(معطيات)  $\overline{YX} \cong \overline{WZ}$ ,  $\overline{YX} \parallel \overline{ZW}$

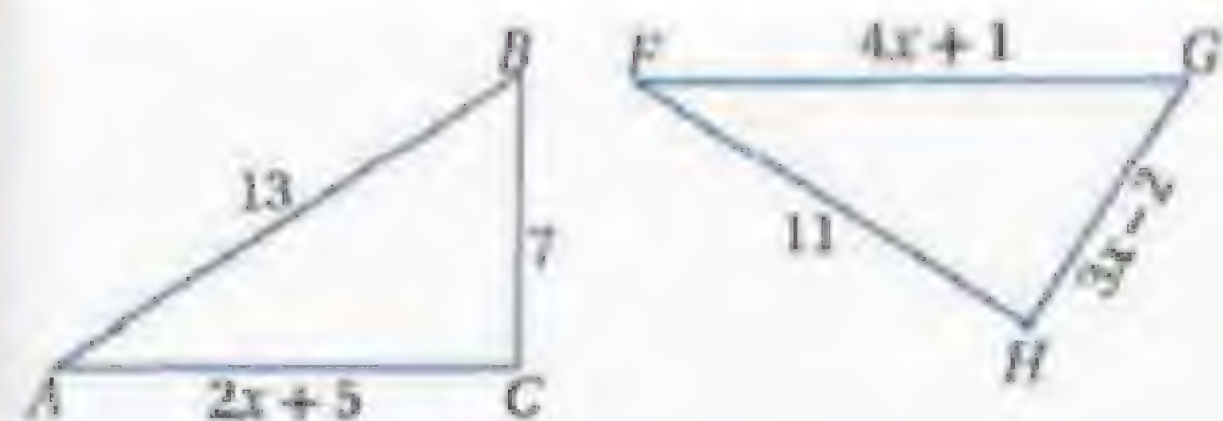
(زاويتان متبادلتان داخلياً)  $\angle YXZ = \angle WZX$

(خاصية الانعكاس)  $XZ = XZ$

$\triangle YXZ \cong \triangle WZX$  حسب مسلمة (S.A.S)



$$\triangle ABC \cong \triangle FGH \quad (22)$$



$$\therefore \triangle FGH \cong \triangle ABC$$

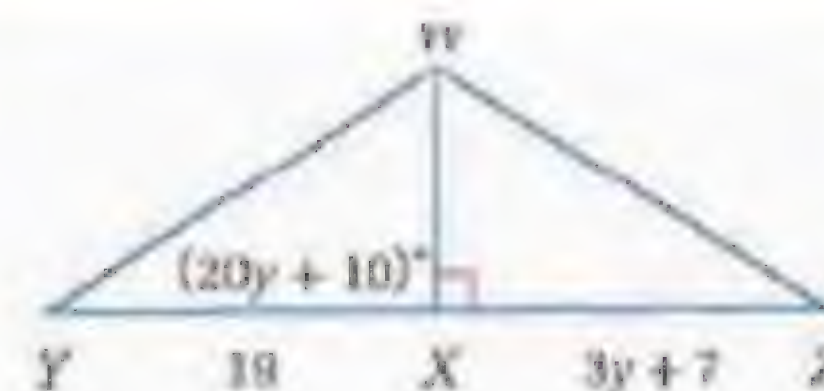
$$\therefore GH = BC$$

$$3x - 2 = 7$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

$$\triangle WXY \cong \triangle WXZ \quad (21)$$



$$\therefore \triangle WXY \cong \triangle WXZ$$

$$\therefore XZ = XY$$

$$3y + 7 = 19$$

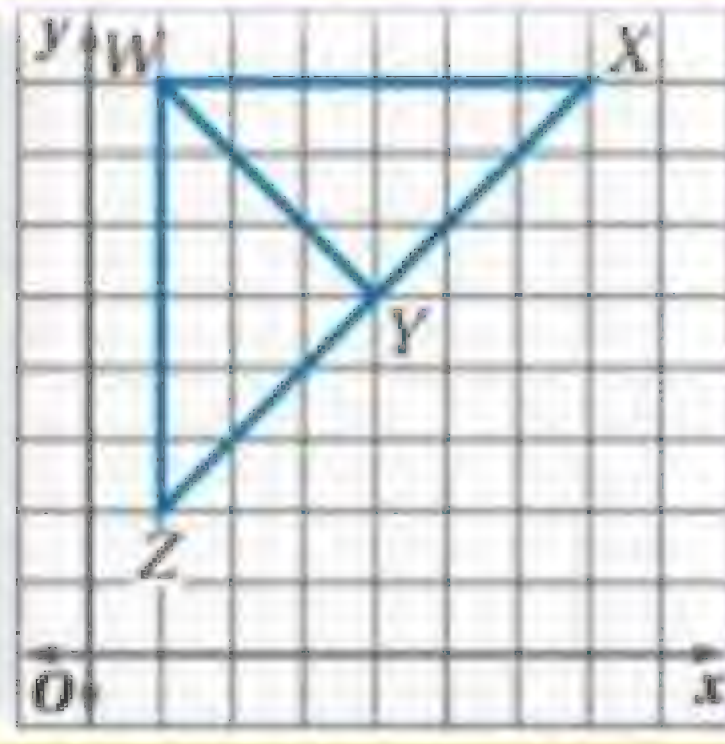
$$3y = 12$$

$$y = 4$$





## مهارات التفكير العليا



23) تحدّد في الشكل المجاور:

a) صفّ طريقتين يمكنك استعمالهما لإثبات أن  $\triangle WYZ$  يطابق  $\triangle WYX$ . علّمًا بأنه لا يُسمح باستعمال المسطرة أو المنقلة. وأي طريقة تعتقد أنها فعّالة أكثر؟ وضع إجابتك.

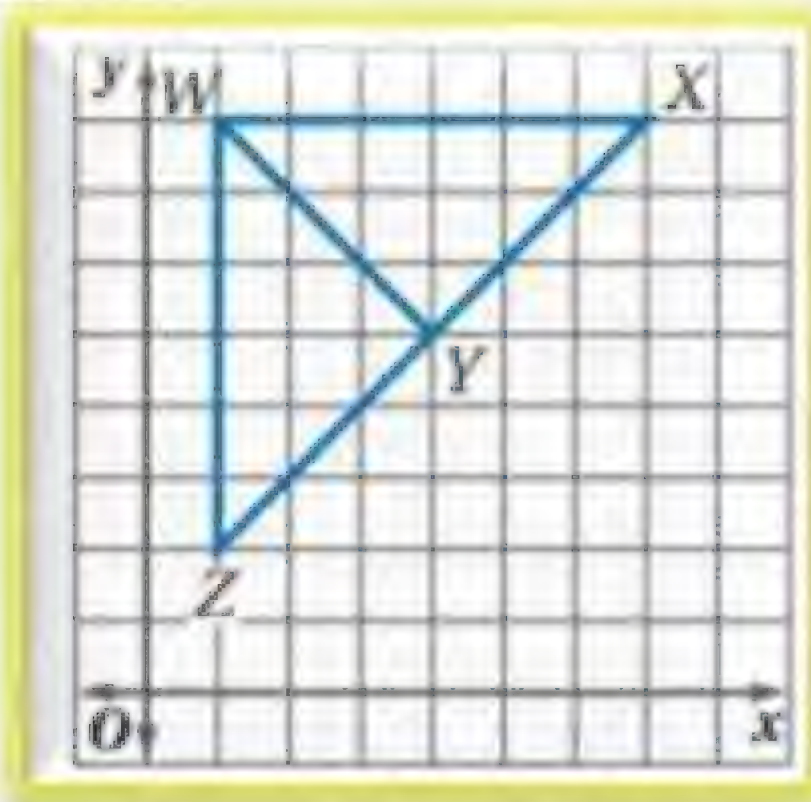


**الطريقة الأولى:** نستخدم صيغة المسافة لإيجاد طول ضلع من الأضلاع، ثم نستخدم معادلة التطابق SSS.

**الطريقة الثانية:** يمكن أن نجد ميل كل من  $\overline{WX}$  و  $\overline{ZY}$  ونبرهن أنهما متعامدان، وبذلك تكون  $\angle WYZ$  و  $\angle WYX$  كلتاهما قائمتين ويمكن استعمال صيغة المسافة لإثبات أن  $XY$  تطابق  $YZ$ . وبما أن المثلثين يشتركان في الضلع  $WY$ ، فيمكن استعمال معادلة SAS لإثبات تطابق المثلثين.

أعتقد أن الطريقة الثانية أفضل لأن فيها خطوتين بدل من ثلاث خطوات كما في الطريقة الأولى.





(b) أثبت أن  $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$  ووضح إجابتك.



$$Y(4, 5), W(1, 8)$$

$$m_{(YW)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 5}{1 - 4} = \frac{3}{-3} = -1$$

$$Z(1, 2), X(7, 8)$$

$$m_{(ZX)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 2}{7 - 1} = \frac{6}{6} = 1$$

ميل  $\overline{WY}$  يساوي -1 وميل  $\overline{ZX}$  يساوي 1، وبما أن ناتج ضربيهما يساوي -1

فإن  $\overline{WY} \perp \overline{ZX}$ . وبما أنهما متعامدان فإن قياس كل من  $\angle WYX$  و  $\angle WYZ$

يساوي  $90^\circ$ . وباستعمال صيغة المسافة نجد أن طول  $\overline{ZY}$  يساوي

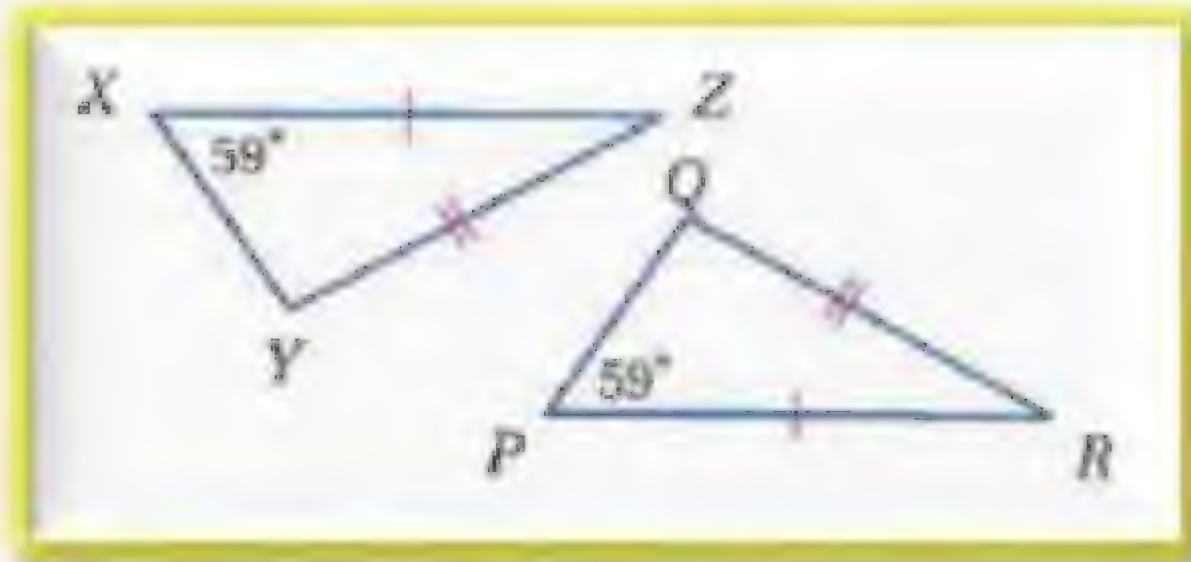
$$\overline{ZY} = \sqrt{(4 - 1)^2 + (5 - 2)^2} = 3\sqrt{2}$$

وكذلك طول  $\overline{XY}$  يساوي

$$\overline{XY} = \sqrt{(4 - 7)^2 + (5 - 8)^2} = 3\sqrt{2}$$

وبما أن  $\overline{WY} \cong \overline{WY}$ ، فإن  $\triangle WYZ \cong \triangle WYX$  حسب مسلمة التطابق SAS.





(24) **اكتشف الخطأ.** قال أحمد: إن  $\triangle PRQ \cong \triangle XYZ$  بحسب SAS. فاعترض خالد وقال: لا توجد معلومات كافية لإثبات أن المثلثين متطابقان. أيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضح إجابتك.

**خالد، لأن الزاوية يجب أن تكون محصورة،  
والزاوية هنا ليست محصورة**



(25) **اكتب:** إذا كان زوجان من الأضلاع المتناظرة لمثلثين قائمي الزاوية متطابقين، فهل المثلثان متطابقان؟ وضح إجابتك.

**الحالة الاولى: إذا علمت أن الوترين متطابقان وكان أحد ضلعي القائمة في الاول يطابق الضلع المناظر له في الثاني فسيكون ضلعا القائمة الآخران متطابقين حسب نظرية فيثاغورث، ولذلك يكون المثلثان متطابقين حسب SSS.**  
**الحالة الثانية: إذا علمت أن ضلعي القائمة في المثلث الاول يطابقان ضلعي القائمة في المثلث الثاني، فسوف يكون المثلثان متطابقين بحسب SAS**



# ٣-٥ إثباتات التطابق في حالتى: ASA, AAS

## Proving Congruence—ASA, AAS

### إثباتات تطابق المثلثات ASA, AAS

### Proving Triangles Congruent-ASA, AAS

#### المقدمة:

تتضمن مسابقات التجديف شخصين أو أكثر يجلسون ووجههم نحو موجرة القارب، وكل منهم يدفع مجدافاً. ويطلب السباق عادة مسطحة من الماء طوله 1500 متر على الأقل. ويمكن استعمال المثلثات المطابقة لقياس المسافات التي يصعب قياسها مباشرة، مثل طول مضمار سباق الزوارق.



**المسألة ASA:** يُسمى الضلع الواقع بين زاويتين متتاليتين لضلع الضلع المحصور. ففي  $\triangle ABC$  المجاور،  $AC$  هو الضلع المحصور بين  $\angle A$ ،  $\angle C$ .



(فيما سبق):

درست إثبات تطابق مثلثين باستعمال SAS, SSS.

والآن:

■ استعمال المسألة ASA

لا اختيار التطابق.

■ استعمال النظرية AAS

لا اختيار التطابق.

(المفردات):

الضلع المحصور

Included Side

### مسألة 3.3

#### التطابق بزاوية - ضلع - زاوية (ASA)

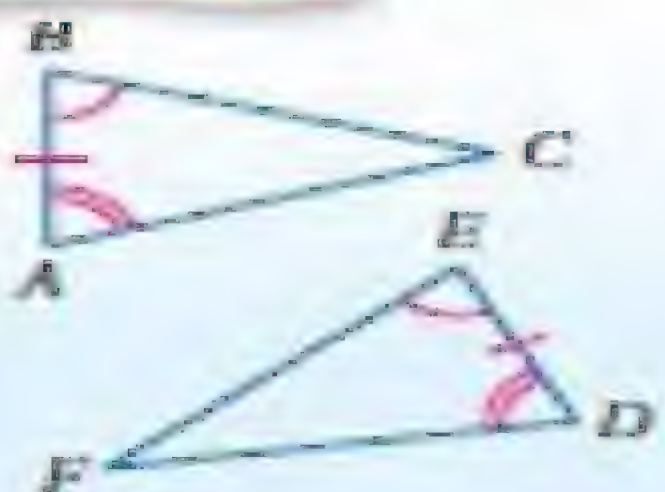
إذا طابقت زاويتان والضلع المحصور بينهما في مثلث نظائرهما في مثلث آخر، فإن المثلثين متطابقان.

مثال، إذا كانت  $\angle A \cong \angle D$ ,

$AB \cong DE$ ,

$\angle B \cong \angle E$ ,

هنا  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



[www.obeikaneducation.com](http://www.obeikaneducation.com)

#### إنشاء هندسي

إنشاء مثلث مطابقاً مثلثاً مرسوماً باستعمال زاويتين والضلع المحصور (ASA)

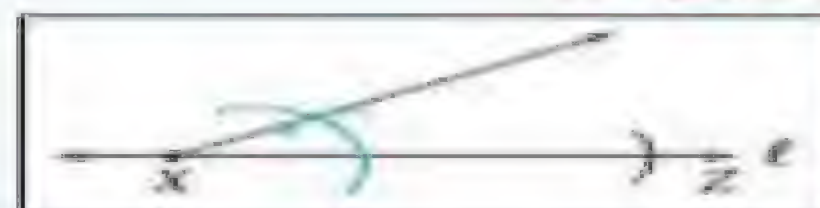
ارسم مثلثاً  $\triangle ABC$  ثم استعمال المسألة ASA لنشئ  $\triangle XYZ$  الذي يطابق  $\triangle ABC$ .

#### الخطوة 1:



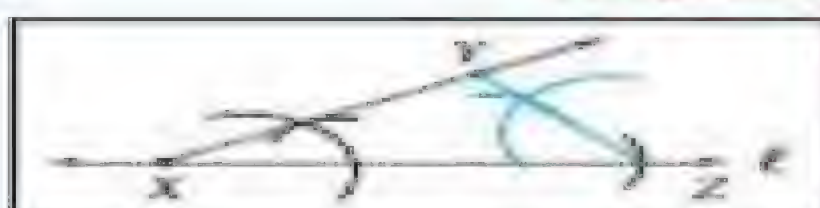
ارسم مستقيماً  $\ell$ ، واختر عليه نقطة  $X$ .  
وانشئ  $XZ$  على أن تكون  $XZ = AC$ .

#### الخطوة 2:



انشئ زاوية مطابقة لـ  $\angle A$  عند النقطة  $X$   
باستعمال  $XZ$  ضلعاً للزاوية.

#### الخطوة 3:



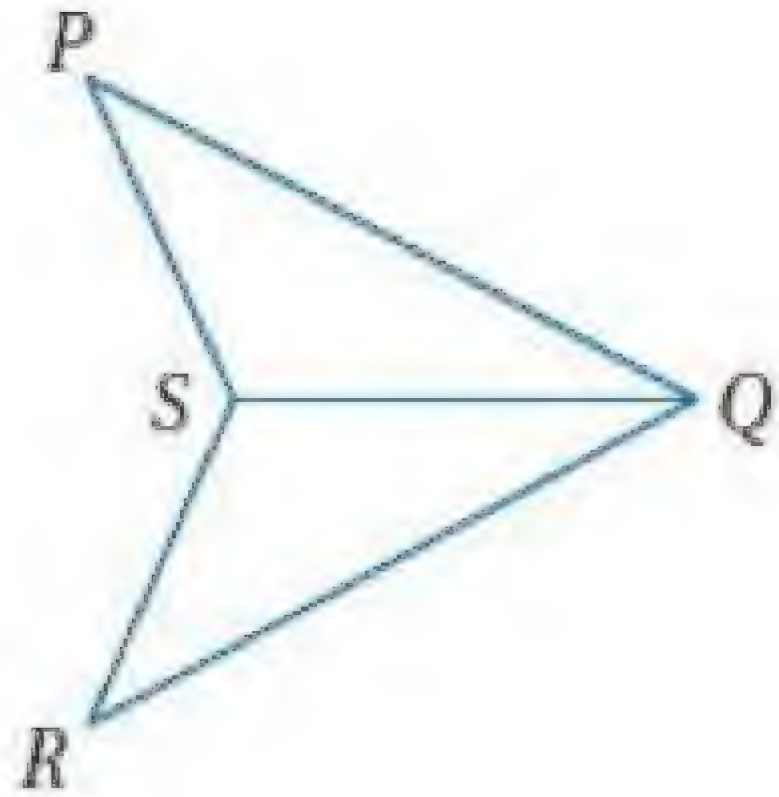
انشئ زاوية مطابقة لـ  $\angle C$  عند النقطة  $Z$   
باستعمال  $XZ$  ضلعاً للزاوية. وسمِّ النقطة  
تقاطع الضلعين الجديدتين للزاويتين  $Y$ .



# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: ASA, AAS Proving Congruence—ASA, AAS

## مثال 1

استعمال ASA لإثبات تطابق مثلثين



اكتب برهاناً ذا عمودين.

المعطيات:  $\overline{QS}$  تنصف  $\angle PQR$

$$\angle PSQ \cong \angle RSQ$$

المطلوب:  $\triangle PQS \cong \triangle RQS$

البرهان:

## إرشادات للدراسة

ضلع . ضلع . زاوية

طولا ضلعين وقياس

زاوية غير محصورة

لا يكفي لإثبات أن

المثلثين متطابقان.

### المبررات

### العبارات

(1) معطيات

$$(1) \overline{QS} \text{ تنصف } \angle PQR, \angle PSQ \cong \angle RSQ$$

(2) تعريف منصف الزاوية

$$(2) \angle PQS \cong \angle RQS$$

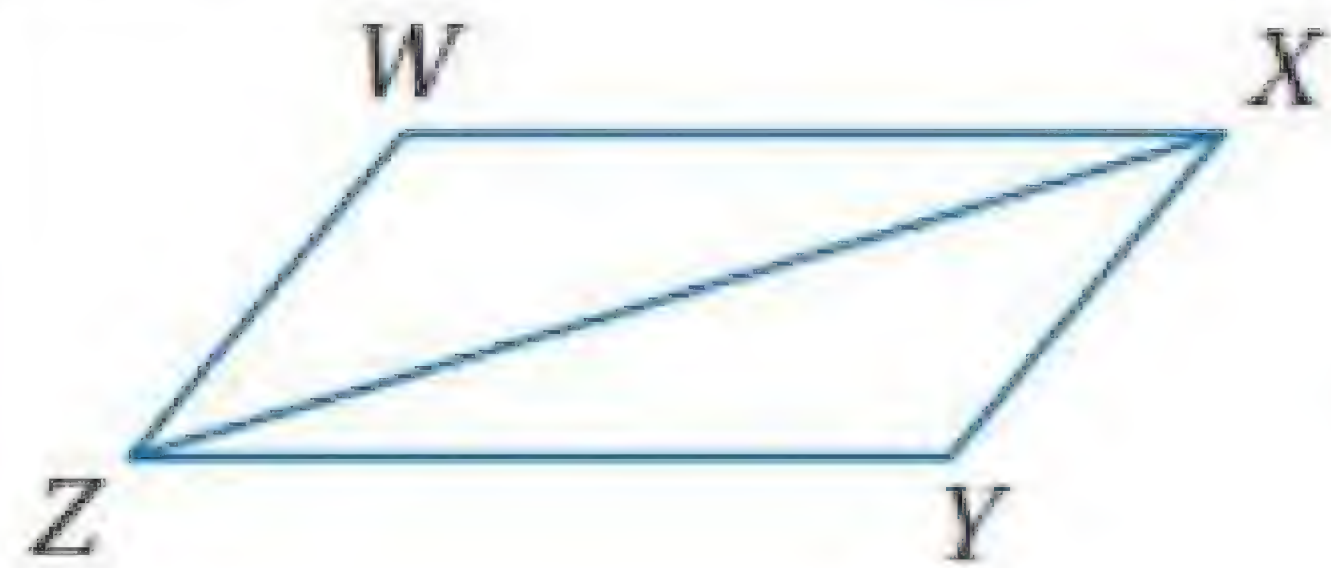
(3) خاصية الانعكاس للتطابق

$$(3) \overline{QS} \cong \overline{QS}$$

(4) ASA

$$(4) \triangle PQS \cong \triangle RQS$$





**(1) اكتب برهاناً حرّاً.**

المعطيات:  $\overline{XZ}$  تنصف  $\angle WZY$ ،  $\overline{XZ}$  تنصف  $\angle YXW$ .

المطلوب:  $\triangle WXZ \cong \triangle XZY$

(1) بما أن  $\overline{XZ}$  تنصف  $\angle WZY$ ، إذن  $\angle WZX \cong \angle YZX$  من تعريف منصف الزاوية.  
وكذلك  $\overline{XZ}$  تنصف  $\angle YXW$ ، إذن  $\angle WXZ \cong \angle YXZ$  من تعريف منصف الزاوية، وبما  
أن  $\overline{XZ} \cong \overline{XZ}$  من خاصية الانعكاس للتطابق. فإن  $\triangle WXZ \cong \triangle YXZ$  بحسب المسلمة  
ASA



# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: ASA, AAS Proving Congruence—ASA, AAS

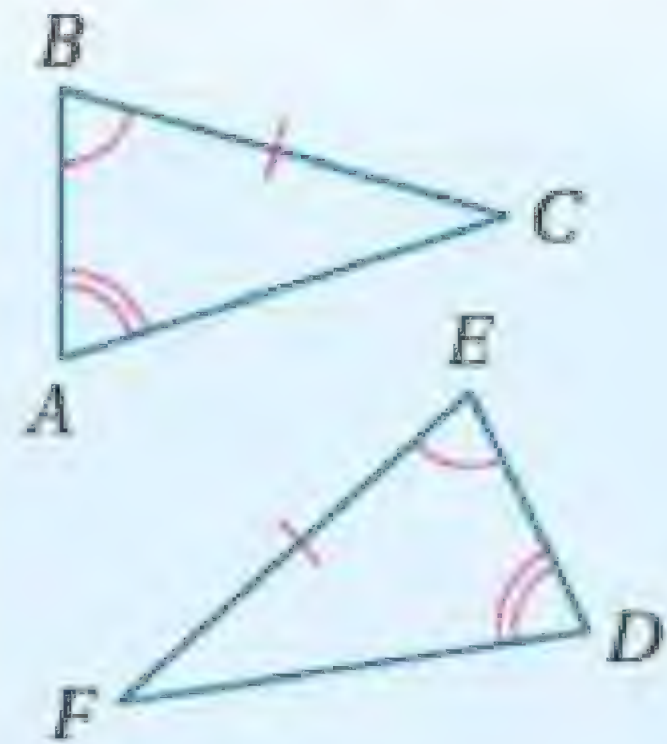
أضف إلى

مطوبتك

## نظرية 3.5

التطابق بزائوية - زائوية - ضلع (AAS)

إذا طابقت زائويتان وضلع غير محصور بينهما في مثلث نظائرها في مثلث آخر يكون المثلثان متطابقين.



مثال إذا كانت  $\angle A \cong \angle D$ ,

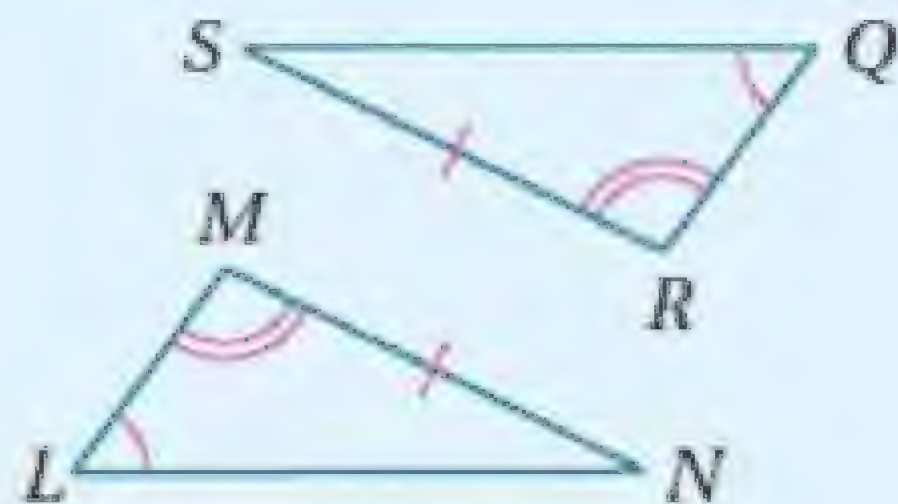
$\angle B \cong \angle E$ ,

$\overline{BC} \cong \overline{EF}$ ,

فإن  $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ .

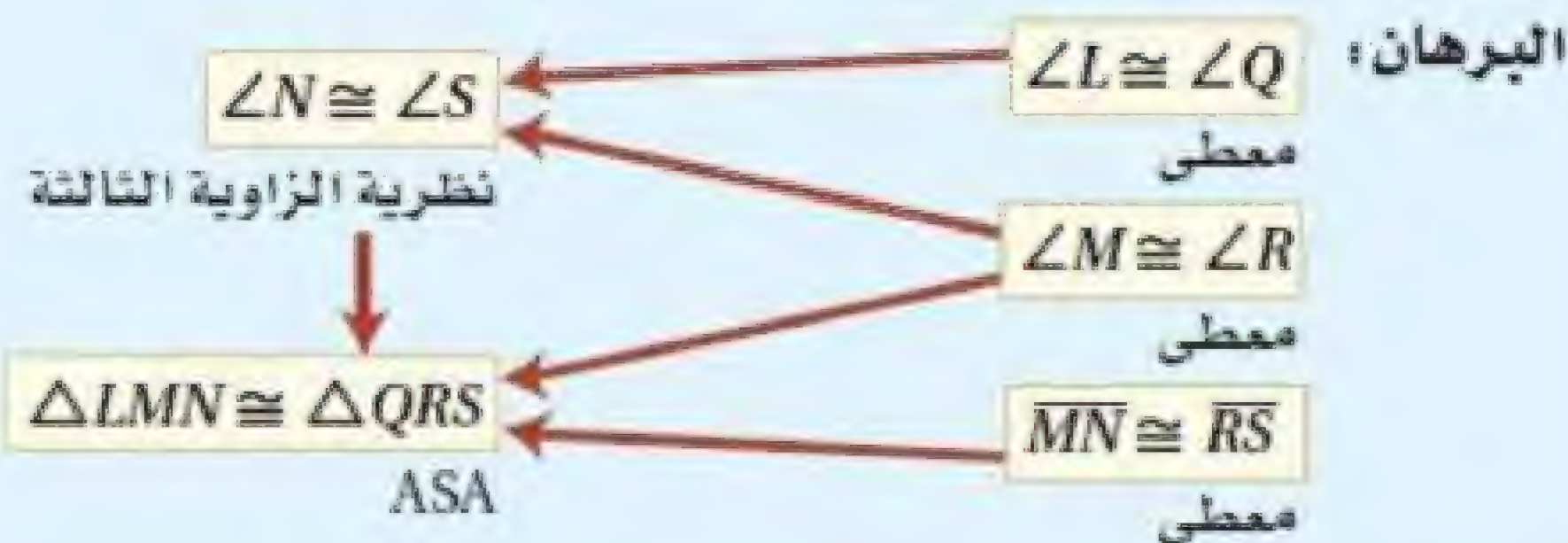
نظرية التطابق بزائوية - زائوية - ضلع (AAS)

برهان



المعطيات:  $\angle L \cong \angle Q$ ,  $\angle M \cong \angle R$ ,  $\overline{MN} \cong \overline{RS}$

المطلوب:  $\triangle LMN \cong \triangle QRS$



إرشادات للدراسة

ضلع - ضلع - زائوية

طولا ضلعين وقياس

زائوية غير محصورة

لا يكفي لإثبات أن

المثلثين متطابقان.

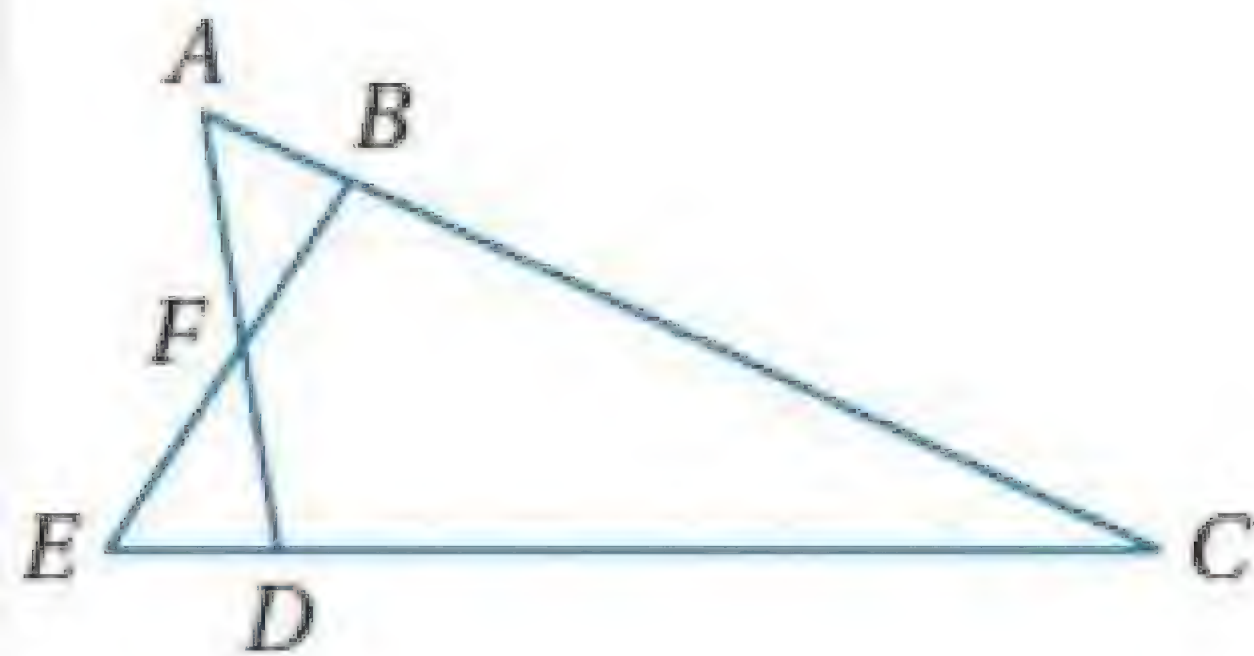


# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: ASA, AAS Proving Congruence—ASA, AAS

## مثال 2

استعمال AAS لإثبات تطابق مثلثين

اكتب برهاناً حرّاً.



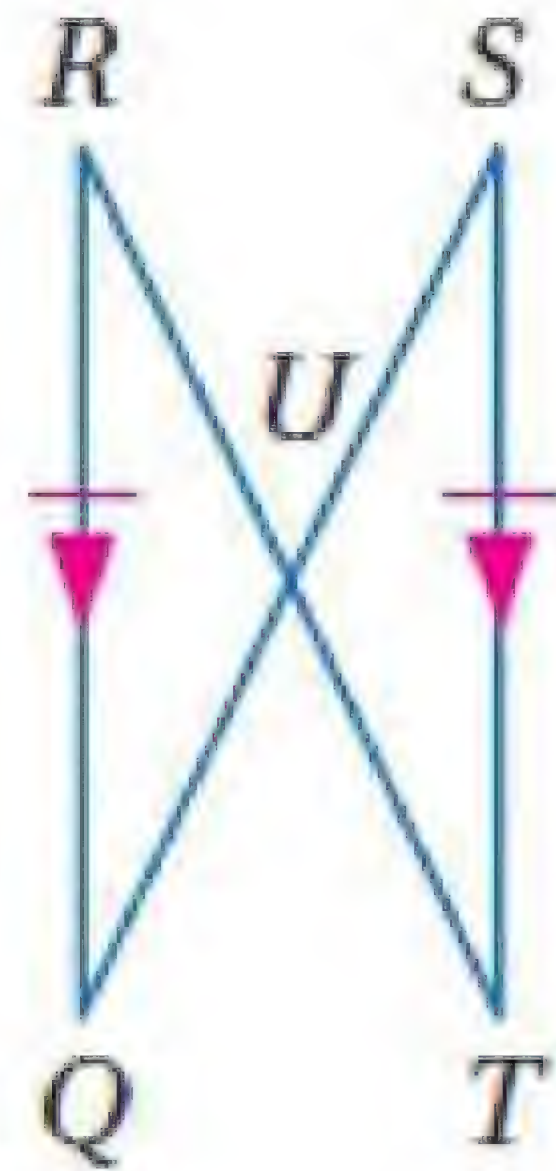
المعطيات:  $\angle DAC \cong \angle BEC$ ,  
 $\overline{DC} \cong \overline{BC}$

المطلوب:  $\triangle ACD \cong \triangle ECB$

البرهان: بما أن  $\angle DAC \cong \angle BEC$ ,  $\overline{DC} \cong \overline{BC}$ ، وأن  $\angle C \cong \angle C$  بحسب خاصية الانعكاس،  
فإن  $\triangle ACD \cong \triangle ECB$  بحسب النظرية AAS.



# ٥-٣ إثبات التطابق في حالتى: $ASA, AAS$ **Proving Congruence—ASA, AAS**

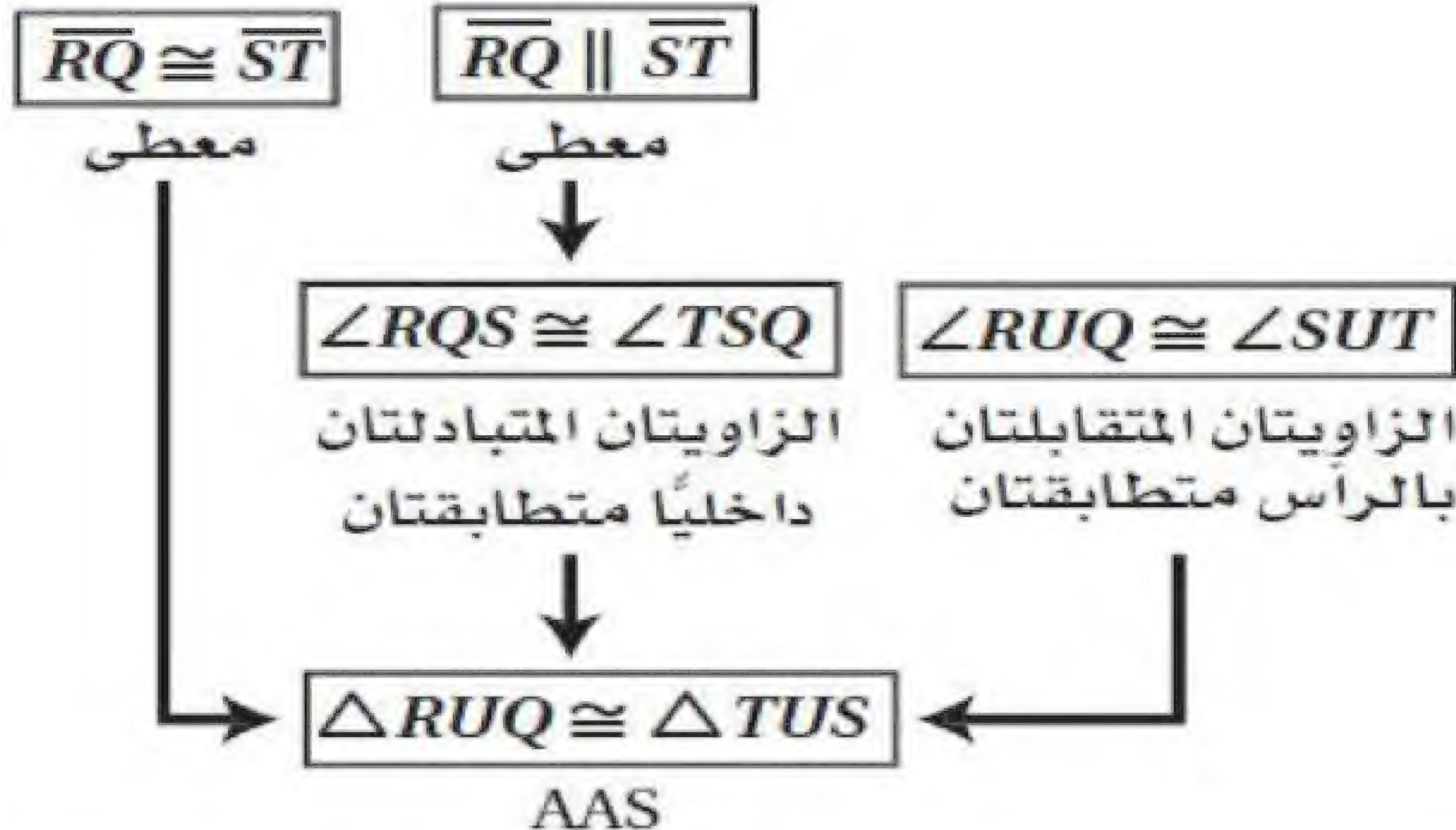


(2) اكتب برهانًا تسلسليًا:

المعطيات:  $\overline{RQ} \cong \overline{ST}$ ,  $\overline{RQ} \parallel \overline{ST}$

المطلوب:  $\triangle RUQ \cong \triangle TUS$

(2) البرهان:





# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: $ASA, AAS$ **Proving Congruence—ASA, AAS**

مثال 3 من واقع الحياة

استعمال تطابق المثلثات في حساب مسافات يصعب قياسها مباشراً

**مسافات:** أراد أكرم أن يحسب المسافة بين النقطتين  $B, C$ . فقام بتعيين نقطة أخرى  $D$  ليستعملها نقطة مرجعية بحيث تكون العلاقات بين القطع المستقيمة كما في الشكل أدناه. إذا علمت أن طول  $DE$  يساوي 8 ft، فاحسب المسافة بين النقطتين  $B, C$ .



لتحديد طول  $\overline{CB}$ ، يجب أولاً أن نثبت أن المثلثين اللذين أنشأهما أكرم متطابقان.

- بما أن  $\overline{CD}$  عمودية على كل من  $\overline{CB}, \overline{DE}$  كما هو مبين في الشكل، وجميع الزوايا القوائم متطابقة. لذا  $\angle BCA \cong \angle EDA$ .

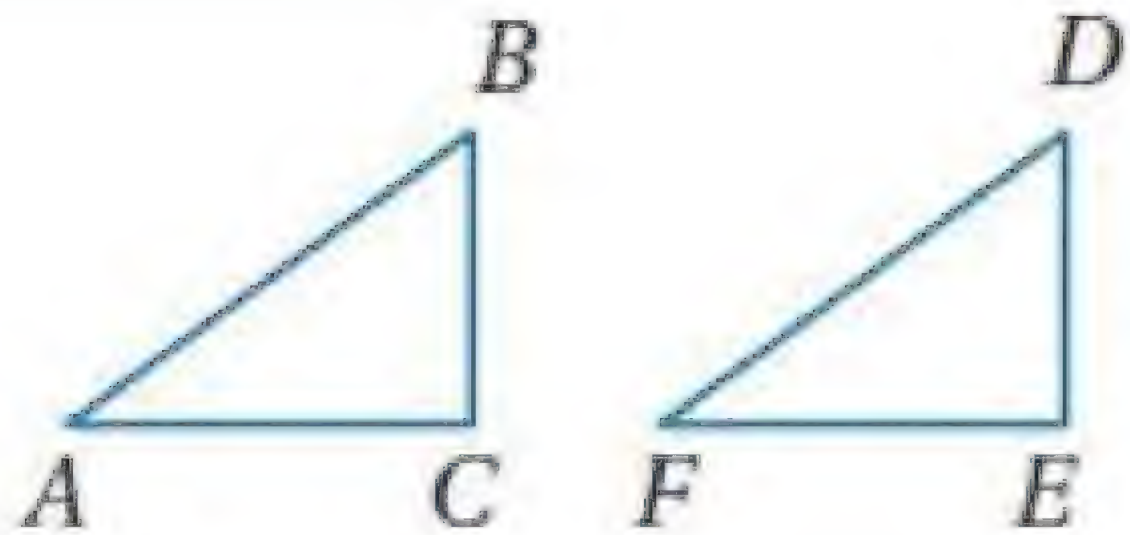
- $\overline{AC} \cong \overline{AD}$

- $\angle BAC, \angle EAD$  زاويتان متقابلتان بالرأس فهما متطابقتان. وبحسب ASA ينتج أن  $\triangle BAC \cong \triangle EAD$ .

وبما أن  $\triangle BAC \cong \triangle EAD$  فإن  $\overline{DE} \cong \overline{CB}$ ؛ لأن العناصر المتناظرة متطابقة. وبما أن طول  $\overline{DE}$  يساوي 8 ft فإن طول  $\overline{CB}$  يساوي 8 ft أيضاً، وهي المسافة بين النقطتين  $B, C$ .



# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: $ASA, AAS$ **Proving Congruence—ASA, AAS**



(3) في المثلثين المجاورين:  
 $\overline{AC} \perp \overline{BC}, \overline{FE} \perp \overline{DE}, \angle BAC \cong \angle DFE, \overline{AB} \cong \overline{FD}$   
 اكتب برهاناً حرّاً يبين أن  $\overline{BC} \cong \overline{DE}$



# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتى: ASA, AAS Proving Congruence—ASA, AAS

## ملخص المفاهيم

### إثبات تطابق المثلثات

أضف إلى

مطوبتك

AAS



تطابق زوجين من الزوايا  
المتناظرة وضلعين غير  
محصورين.

ASA



تطابق زوجين من الزوايا  
المتناظرة والضلعين  
المحصورين بينهما.

SAS



تطابق زوجين من الأضلاع  
المتناظرة والزاويتين  
المحصورتين بينهما.

SSS



الأزواج الثلاثة من الأضلاع  
المتناظرة متطابقة.

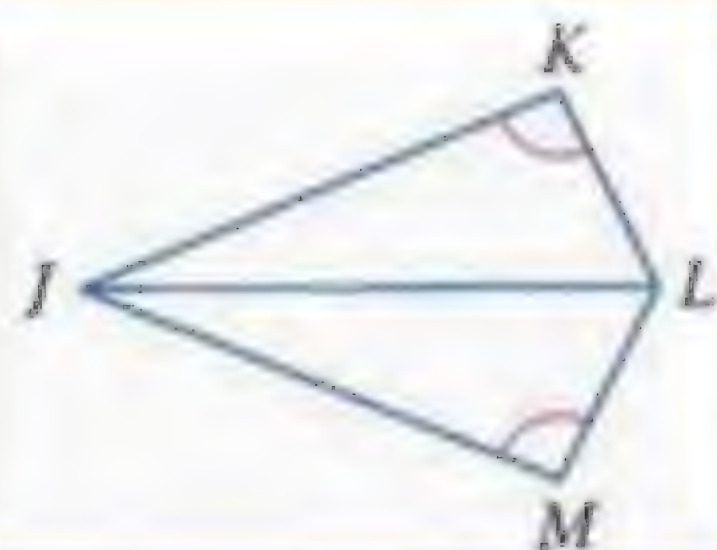


# ٣-٥ إثبات التطابق في حالتين: ASA, AAS Proving Congruence—ASA, AAS

تأكد

المثالان  
١، ٢

برهان: برهن كلاً مما يأتي باستعمال طريقة البرهان المذكورة:



(2) برهان جز

المعطيات:  $\angle K \cong \angle M$ ,

$\overline{JL}$  تنصف  $\angle KLM$ .

المطلوب: إثبات أن:  $\triangle JKL \cong \triangle JML$



(1) برهان تسلسلي

المعطيات:  $\overline{JK} \parallel \overline{LM}$ ,  $\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

المطلوب: إثبات أن:  $\triangle JML \cong \triangle MJK$

الحل

$\angle KLM$  تنصف  $\overline{JL}$  ،  $\angle K \cong \angle M$

بما أن  $\overline{JL}$  تنصف  $\angle KLM$  فإن  $\angle KLJ \cong \angle MLJ$  . لذا

$\triangle JKL \cong \triangle JML$  حسب نظرية التطابق AAS.

$\overline{JM} \parallel \overline{MJ}$

خاصية الانعكاس

$\overline{JL} \parallel \overline{KM}$

معطى

$\overline{JK} \parallel \overline{LM}$

معطى

$\angle LJM \cong \angle KMJ$

زاويتين متبادلتين داخلياً

$\angle KJM \cong \angle LMJ$

زاويتين متبادلتين داخلياً

$\triangle JML \cong \triangle MJK$

ASA





### المثال ٣

(3) **بناء جسور**، يحتاج متاح إلى إيجاد المسافة بين النقطتين  $A, B$  المبيتين في الشكل المجاور لبناء جسر فوق النهر. فوضع وتدا عند  $A$ ، ووضع زميله وتدا عند  $B$  في الجهة المقابلة، ثم عين المشاح النقطة  $C$  في جهة  $A$ ، بحيث كانت  $\overline{CA} \perp \overline{AB}$ ، ووضع وتدا رابعاً عند  $E$ ، التي هي نقطة منتصف  $\overline{CA}$ ، وأخيراً وضع وتدا عند النقطة  $D$ ، بحيث كان  $\overline{CD} \perp \overline{CA}$ ، والنقاط  $D, E, B$  تقع على مستقيم واحد.

(a) وضح كيف يمكن أن يستعمل المشاح المثلثين المتكويين لإيجاد المسافة بين النقطتين  $A, B$ .

### الحل

نعم أن  $\angle BAE, \angle DCE$  متطابقان. لأنهما زاويتان قائمتان،  $\overline{AE}$  تطابق  $\overline{EC}$  بحسب نظرية نقطة المنتصف. ومن نظرية الزاويتين المتقابلتين بالرأس، نعم أن  $\angle DEC \equiv \angle BEA$ ، وبحسب  $ASA$ ، يعطى المشاح أن  $\triangle DCE \equiv \triangle BAE$  ولأن العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة فإن  $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$ ، ولذا يمكن للمشاح أن يقيس  $\overline{DC}$  وبذلك يعرف المسافة بين  $A, B$ .

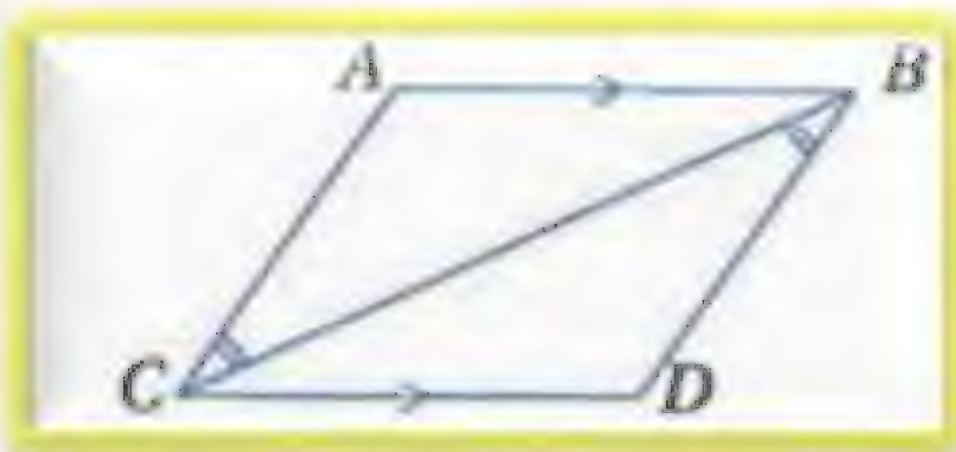
(b) إذا كان:  $AC = 160 \text{ m}$ ,  $DC = 60 \text{ m}$ ,  $DE = 100 \text{ m}$ ، فأوجد المسافة بين النقطتين  $A, B$ . ووضح إجابتك.

المسافة بين النقطة  $A, B = 60 \text{ m}$  لأن  $\overline{DC} \equiv \overline{AB}$  بحسب تعريف تطابق القطع المستقيمة.



✓ **تدرب وحل المسائل**

**المثال ١**



**برهان:** على الشكل المقابل:

(٤) المعطيات،  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

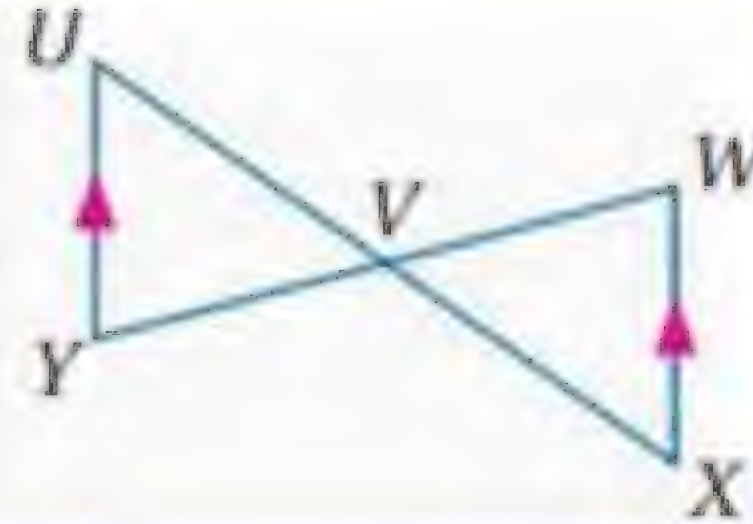
$$\angle CBD \cong \angle BCA$$

المطلوب،  $\triangle CAB \cong \triangle BDC$

بما أن  $AB \parallel CD$  إذن  $\angle ABC \cong \angle BCD$   
 $\angle CBD \cong \angle BCA$ ،  $CB$  ضلع مشترك  
 $\triangle CAB \cong \triangle BDC$   
 بحسب مسلمة التطابق ASA



## المثال ٢



برهان، اكتب برهاناً ذا عمودين.

(5) المعطيات،  $V$  نقطة منتصف  $\overline{YW}$

$$\overline{XW} \parallel \overline{UY}$$

المطلوب،  $\triangle UYV \cong \triangle XVW$

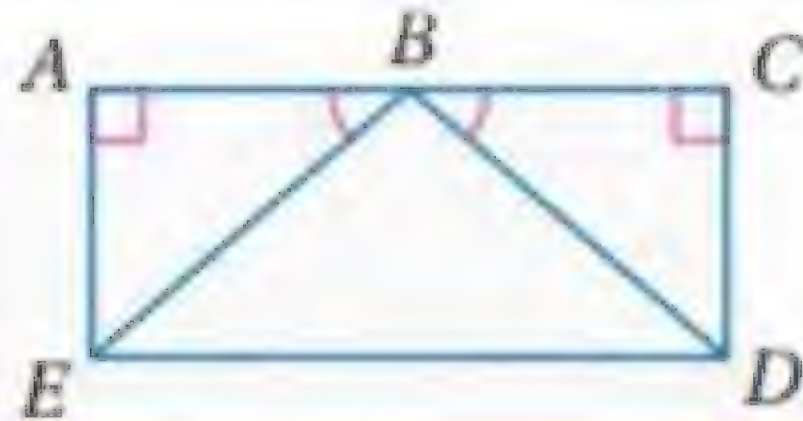
الحل

(6) برهان، اكتب برهاناً تسلسلياً.

المعطيات،  $\angle A, \angle C$  زاويتان قائمتان.

$$\angle ABE \cong \angle CBD, \overline{AE} \cong \overline{CD}$$

المطلوب،  $\overline{BE} \cong \overline{BD}$



(1)  $V$  نقطة منتصف  $\overline{YW}, \overline{UY} \parallel \overline{XW}$  (معطيات)

(2)  $\overline{YV} \cong \overline{VW}$  (تعريف نقطة المنتصف)

(3)  $\angle VWX \cong \angle VYU$  (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

(4)  $\angle VUY \cong \angle VXW$  (نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً)

(5)  $\triangle UYV \cong \triangle XVW$  (حسب نظرية A.A.S)

$$\overline{AE} \cong \overline{CD}$$

معنى

$$\angle ABE \cong \angle CBD$$

معنى

$$\angle A, \angle C \text{ زاويتان قائمتان}$$

معنى

$$\angle A \cong \angle C$$

جميع الزوايا القائمة متطابقة

$$\triangle EBA \cong \triangle DBC$$

A.A.S

$$\overline{BE} \cong \overline{BD}$$

العناصر المتطابقة في المثلثين متطابقة



(7) سباق زوارق، يرغب المشرفون في إقامة سباق تجديف في بحيرة، لكنهم غير متأكدين مما إذا كان طول البحيرة كافياً لإجراء السباق أم لا، ولقياس طول البحيرة حددوا رؤوس المثلثين المبيين في الشكل أدناه، ووجدوا أطوال أضلاع  $\triangle HJK$ ، استعمل المعلومات الواردة في فقرة لماذا للإجابة عن الفقرتين a, b

(a) وضح كيف يستعمل المشرفون على السباق المثلثين المتكونين لتقدير المسافة  $FG$  عبر البحيرة.

(a)  $\angle HJK \cong \angle KFG$  لأن جميع الزوايا القوائم متطابقة و  $\overline{JK} = \overline{KF}$   
و  $\angle HKJ \cong \angle FKG$  متقابلتان بالرأس وبحسب  $ASA$  فإن  $\triangle HKJ \cong \triangle GFK$   
لذا فإن  $\overline{FG} = \overline{HJ}$  لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة،  
ولذلك يمكن قياس  $\overline{HJ}$  لتقدير المسافة  $\overline{FG}$  عبر البحيرة.

(b) هل طول البحيرة كافٍ لإجراء سباق الزوارق باستعمال القياسات المعطاة؟ وضح إجابتك.

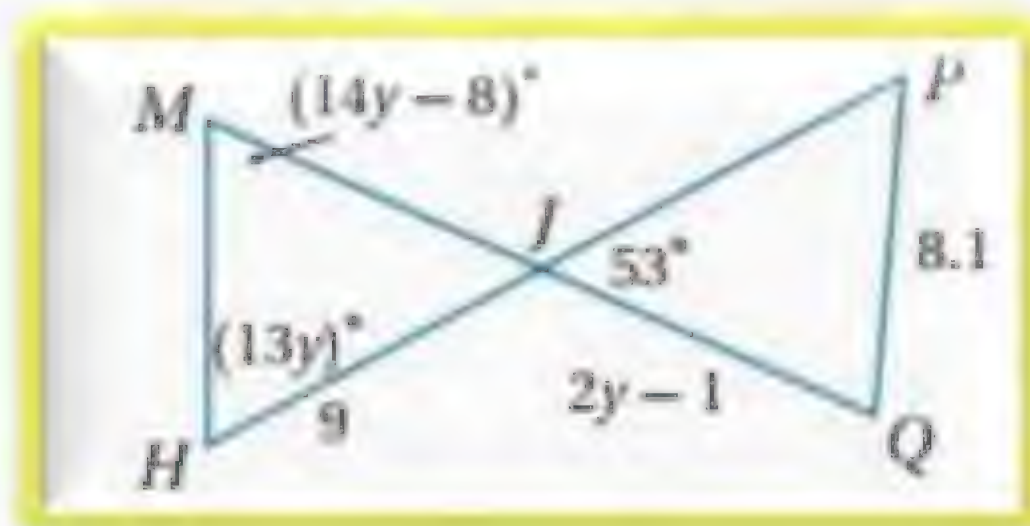
(b)  
بما أن  $\overline{FG} = \overline{HJ}$  إذن  $\overline{FG} = 1350$  أي طول البحيرة  $= 1350$  وهذه المسافة غير مطابقة للمسافة المطلوبة، إذن طول البحيرة غير كافٍ لإجراء السباق.  
جبر: أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:





**جبر،** أوجد قيمة المتغير التي تجعل المثلثين متطابقين في كل من السؤالين الآتيين:

$$\triangle MHJ \cong \triangle PQJ \quad (9)$$



$$\therefore \triangle MHJ \cong \triangle PQJ$$

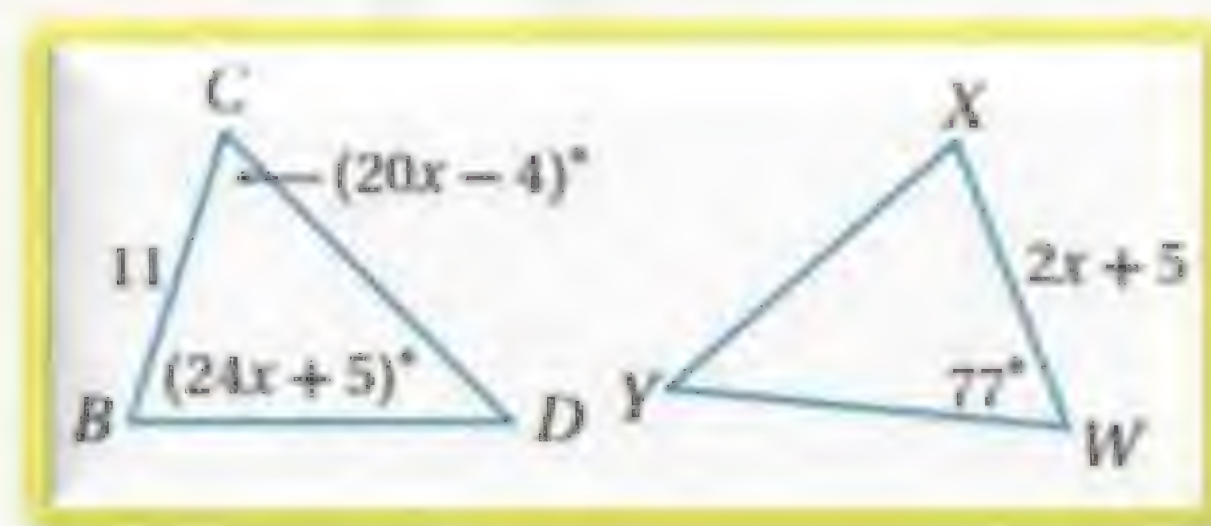
$$\therefore HJ = QJ$$

$$9 = 2y - 1$$

$$2y = 9 + 1$$

$$y = 5$$

$$\triangle BCD \cong \triangle WXY \quad (8)$$



$$\therefore \triangle BCD \cong \triangle WXY$$

$$\therefore BC = WX$$

$$11 = 2x + 5$$

$$2x = 11 - 5$$

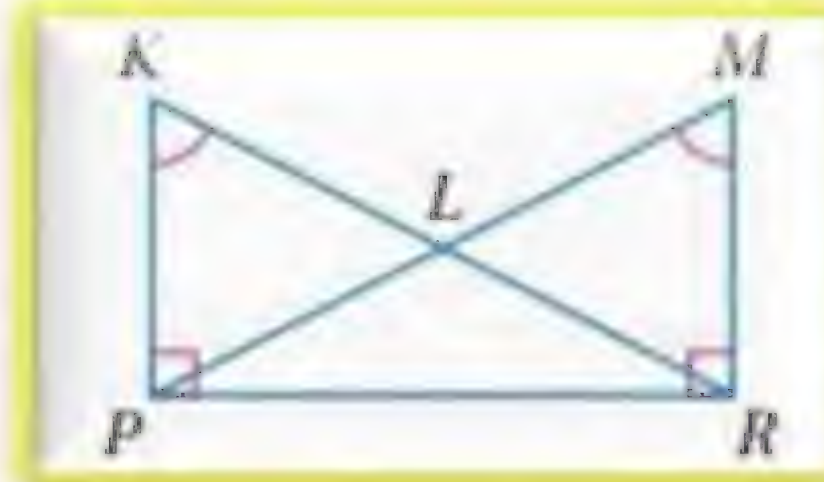
$$2x = 6$$

$$x = 3$$





برهان، اكتب برهاناً ذا عمودين



(10) المعطيات،  $\angle K \cong \angle M$ ,  $\overline{KP} \perp \overline{PR}$ ,  $\overline{MR} \perp \overline{PR}$

$$\overline{MR} \perp \overline{PR}$$

المطلوب،  $\angle KPL \cong \angle MRL$

الحل



(11) المعطيات،  $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$

المطلوب،  $\overline{QT} \cong \overline{WU}$

(1)  $\angle K \cong \angle M$ ,  $\overline{KP} \perp \overline{PR}$ ,  $\overline{MR} \perp \overline{PR}$  (معطيات)

(2)  $\angle KPR$ ,  $\angle MRP$  قائمتان (تعريف التعامد)

(3)  $\angle KPR \cong \angle MRP$  (جميع الزوايا القوائم متطابقة)

(4)  $\overline{PR} \cong \overline{PR}$  (خاصية الانعكاس للتطابق)

(5)  $\triangle KPR \cong \triangle MRP$  (A.A.S)

(6)  $\overline{KP} \cong \overline{MR}$  (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(7)  $\angle KLP \cong \angle MLR$  (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

(8)  $\triangle KLP \cong \triangle MLR$  (A.A.S)

(9)  $\angle KPL \cong \angle MRL$  (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(1)  $\overline{QR} \cong \overline{SR} \cong \overline{WR} \cong \overline{VR}$  (معطيات)

(2)  $\angle QRV \cong \angle SRW$  (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

(3)  $\triangle VRQ \cong \triangle SRW$  (S.A.S)

(4)  $\angle VQR \cong \angle SWR$  (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)

(5)  $\angle QRT \cong \angle URW$  (الزاويتان المتقابلتان بالرأس متطابقتان)

(6)  $\triangle URW \cong \triangle TRQ$  (A.S.A)

(7)  $\overline{QT} \cong \overline{WU}$  (العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة)



(12) **دراجات هوائية** : يشكّل أنبوب مقعد الدراجة مثلثًا مع كلّ من دعائمي السلسلة والمقعد. إذا كانت كل دعامة مقعد تشكّل زاوية قياسها  $68^\circ$  مع دعامة السلسلة المناظرة لها، وكلّ دعامة سلسلة تشكّل زاوية قياسها  $44^\circ$  مع أنبوب المقعد، فبيّن أن دعائمي المقعد لهما الطول نفسه.



$$(1) \quad m\angle ACB = 68^\circ, m\angle ADB = 68^\circ, m\angle CBA = 44^\circ, m\angle DBA = 44^\circ \quad (\text{معطيات})$$

$$(2) \quad m\angle ACB = m\angle ADB, m\angle CBA = m\angle DBA \quad (\text{بالتعويض})$$

$$(3) \quad m\angle ACB \cong m\angle ADB, m\angle CBA \cong m\angle DBA \quad (\text{تعريف تطابق الزوايا})$$

$$(4) \quad \overline{AB} \cong \overline{AB} \quad (\text{خاصية الانعكاس للتطابق})$$

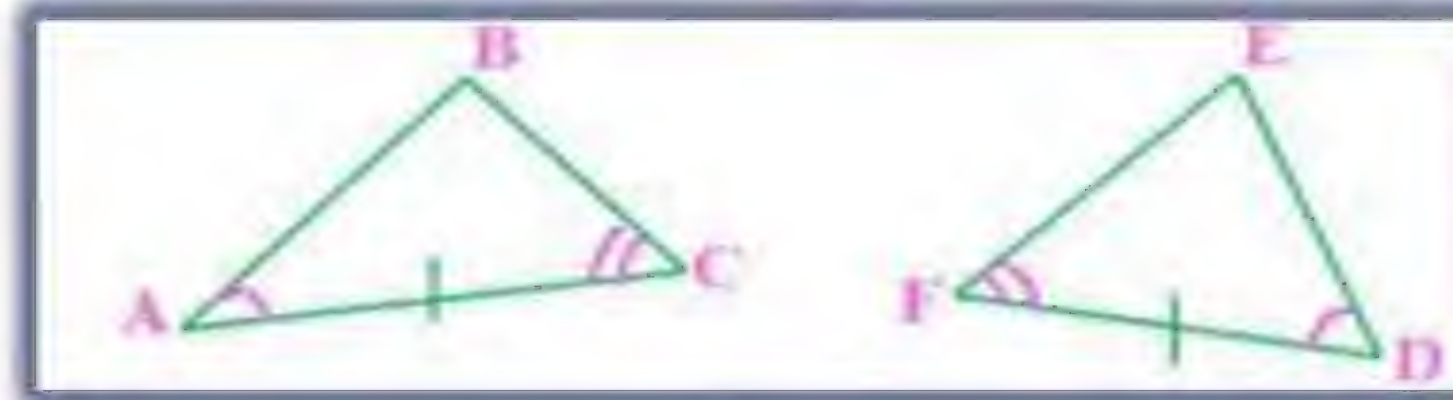
$$(5) \quad \triangle ADB \cong \triangle ACB \quad (A.A.S)$$

$$(6) \quad \overline{AC} \cong \overline{AD} \quad (\text{العناصر المناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة})$$



(13) مسألة مفتوحة: ارسم مثلثين يمكن إثبات تطابقهما باستعمال مسلّمة ASA، وصفهما.

$\Delta ABC \cong \Delta DEF$   
حسب مسلّمة ASA

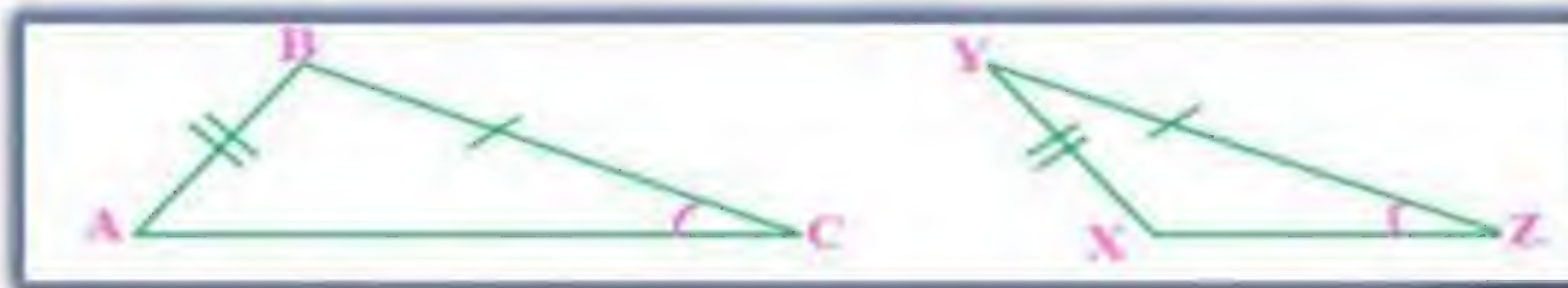


الحل

(14) اكتشف الخطأ: يقول عمر إنه لا يمكن إثبات تطابق مثلثين بتطابق ثلاث زوايا AAA، بينما يقول حسن إنه بإمكانه إثبات هذا التطابق، أيهما كانت إجابته صحيحة؟ وضع إجابتك.

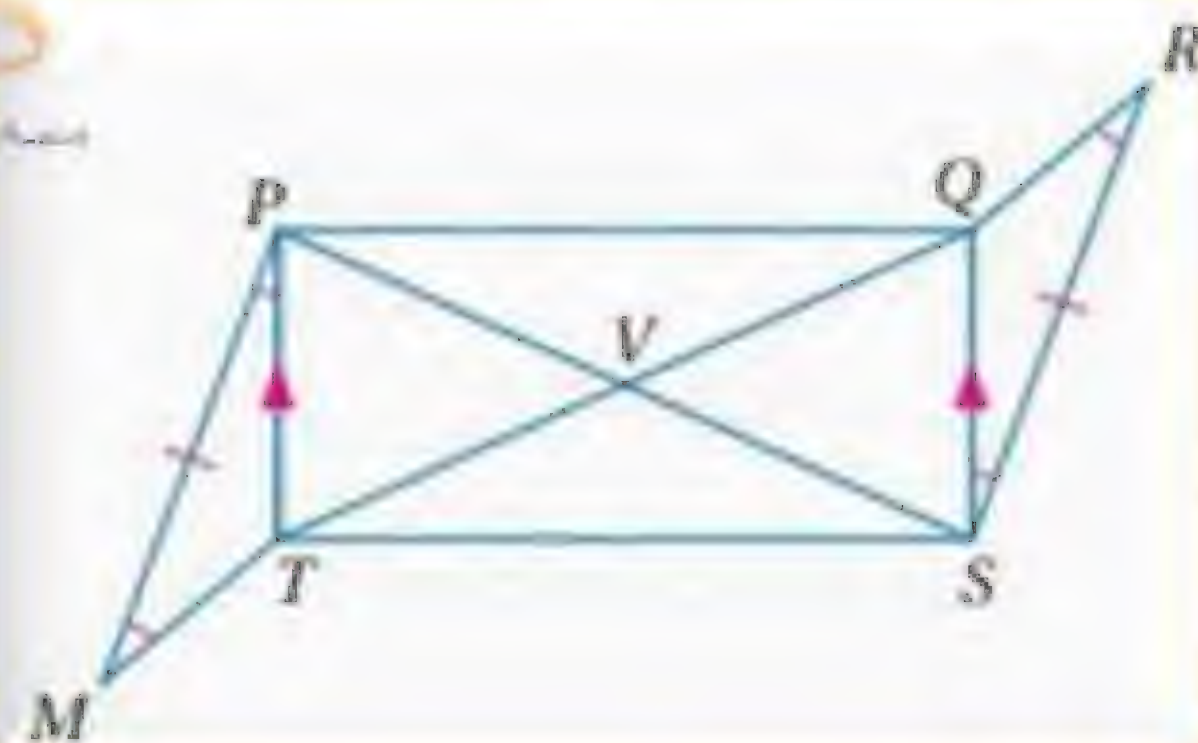
عمر إجابته صحيحة، لأن حسن حاول إثبات التطابق باستعمال AAA وهي ليست من الحالات التي تستعمل لإثبات التطابق

(15) تبرير: أوجد مثالا مضادا يوضح لماذا لا تستعمل حالة تطابق ضلعين وزاوية غير محصورة بينهما SSA؛ لإثبات تطابق مثلثين.

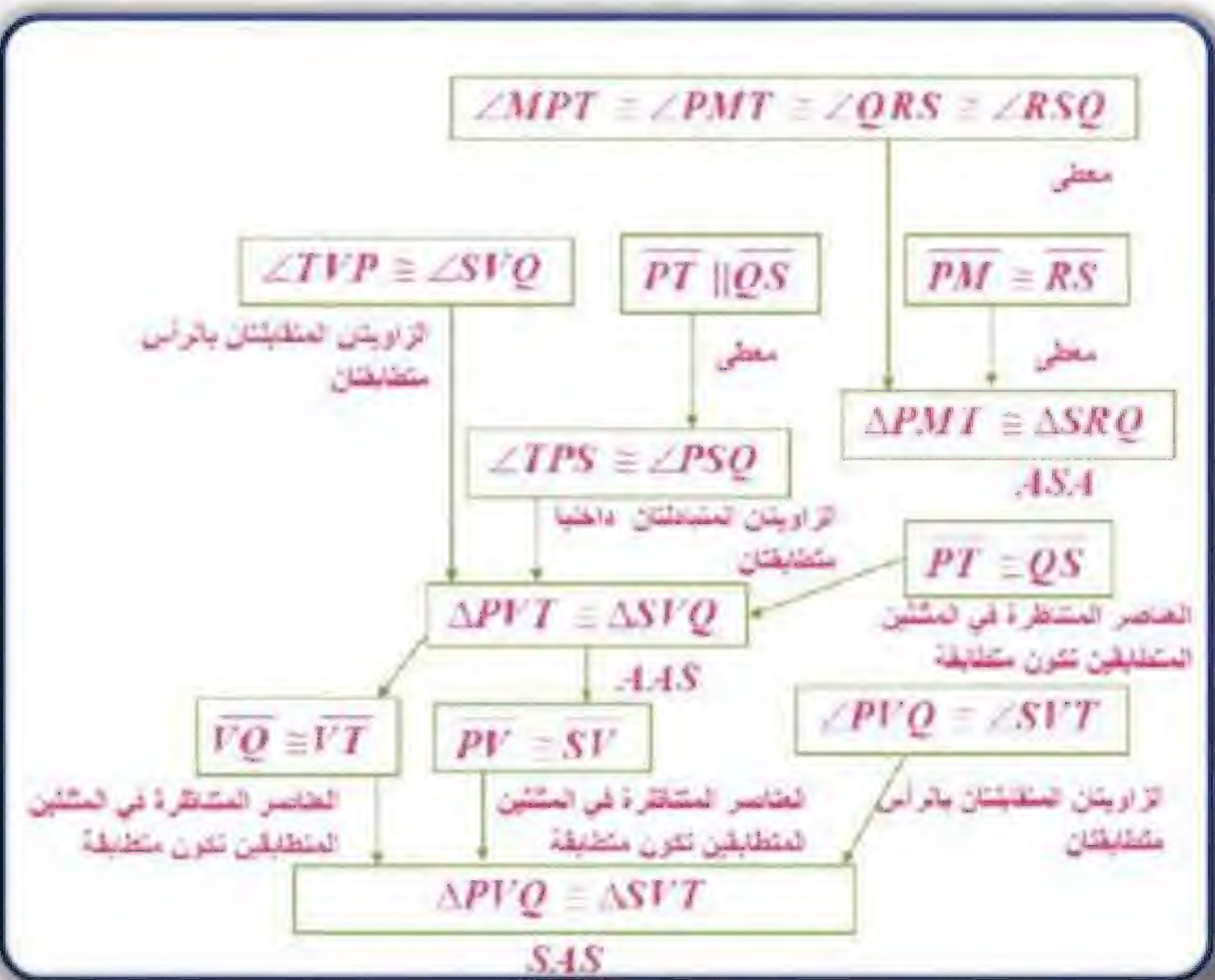


في المثلثين أدناه نلاحظ أن:  $BC \cong YZ, \angle C \cong \angle Z, AB \cong XY$ .  
لكن  $\Delta ABC \cong \Delta XYZ$





**16) تحدد:** باستعمال المعلومات المعطاة في الشكل المجاور، اكتب برهانا تسلسلياً لإثبات أن  $\triangle PVT \cong \triangle SVQ$ .





(17) **اكتب:** لخص الطرائق الواردة في الدروس من 3-3 إلى 5-3؛ لإثبات تطابق المثلثات في جدول موضحاً متى تُستعمل كل طريقة.



الطريقة	وقت استعمالها
تعريف المثلثين المتطابقين	عندما تكون جميع العناصر في أحد المثلثين متطابقة مع نظيراتها في المثلث الآخر
SSS	عندما تكون الأضلاع الثلاث في المثلث الأول متطابقة مع الأضلاع الثلاثة في المثلث الثاني
SAS	عندما يتطابق ضلعان والزاوية المحصورة بينهما في أحد المثلثين مع ضلعين والزاوية المحصورة بينهما في المثلث الآخر.
ASA	عندما يتطابق زاويتان والضلع المحصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين والضلع المحصور بينهما في المثلث الآخر.
AAS	عندما تتطابق زاويتان وضلع غير محصور بينهما في أحد المثلثين مع زاويتين وضلع غير محصور بينهما في المثلث الآخر.



### لماذا؟

يوجد للسكة الحديدية للعبة القاطرة السريعة في مدينة الألعاب دعائم مثلثية بين المسارات لتقويتها وتثبيتها. والدعائم المثلثية الظاهرة في الصورة مثلثات متطابقة الضلعين.

### فيما سبق:

درست المثلثات المتطابقة الضلعين والمثلثات المتطابقة الأضلاع.

### والآن:

■ أستعمل خصائص

المثلثات المتطابقة

الضلعين.

■ أستعمل خصائص

المثلثات المتطابقة

الأضلاع.

### خصائص المثلث المتطابق الضلعين: تذكر أن

المثلثات المتطابقة الضلعين لها على الأقل ضلعان متطابقان، وأن لعناصره أسماء خاصة.

يُسمى الضلعان المتطابقان **بالساقين**، وتُسمى الزاوية التي

ضلعاها الساقان **زاوية الرأس**. ويُسمى ضلع المثلث المقابل لزاوية الرأس القاعدة. والزاويتان المكونتان من

القاعدة والضلعين المتطابقين تُسميان **زاويتي القاعدة**.

### المفردات:

**الساقان**

legs of an isosceles triangle

**زاوية الرأس**

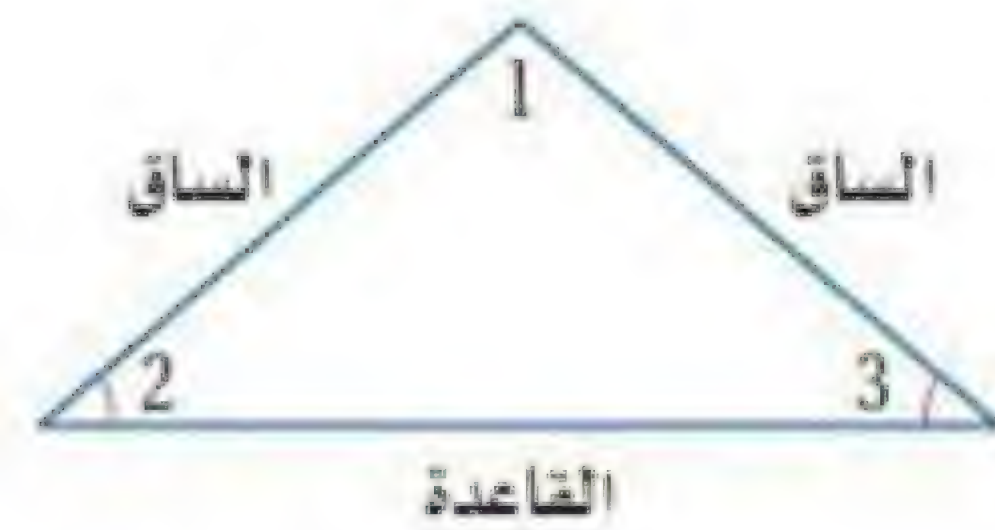
vertex angle

**زاويتي القاعدة**

base angles

ففي الشكل المجاور،  $\angle 1$  هي زاوية الرأس،

وزاويتي القاعدة هما  $\angle 2$ ،  $\angle 3$ .





# ٦-٣ المثلثات المتطابقة الضلعين Isosceles Triangles

## نظريات

### المثلث المتطابق الضلعين

أضف إلى

مطويته



### 3.10 نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابق ضلعان في مثلث، فإن الزاويتين المقابلتين لهما متطابقتان.

مثال، إذا كان  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ ، فإن  $\angle 1 \cong \angle 2$ .

### 3.11

عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين

إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما متطابقان.

مثال، إذا كان  $\angle 1 \cong \angle 2$ ، فإن  $\overline{FE} \cong \overline{DE}$ .



ستبرهن النظرية 3.11 في السؤال 24

## مثال 1

### القطع المستقيمة المتطابقة والزاويا المتطابقة

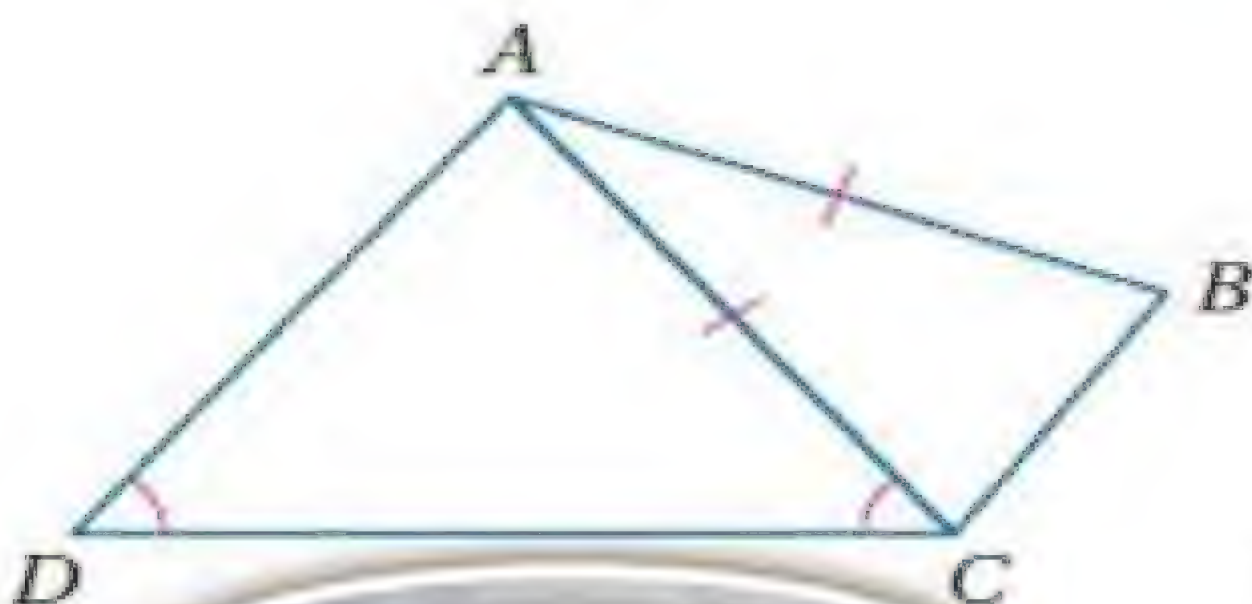
(a) سمّ زاويتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle ACB$  تقابل  $\overline{AB}$ ،  $\angle B$  تقابل  $\overline{AC}$ ؛

لذا فإن  $\angle ACB \cong \angle B$ .

(b) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

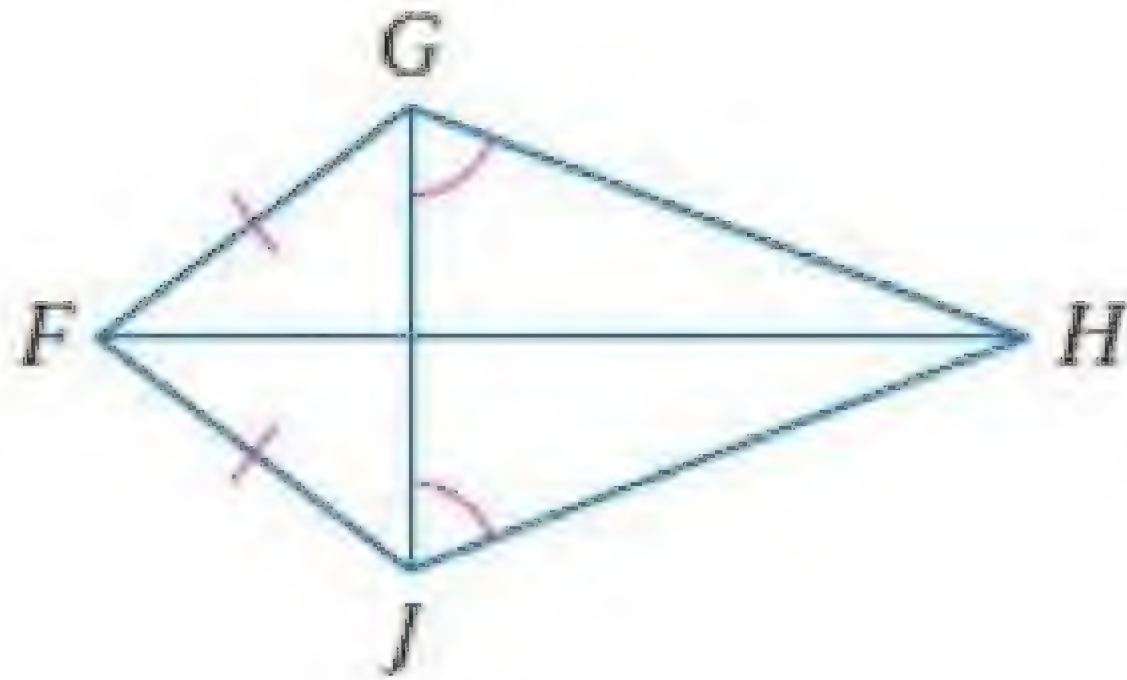
$\overline{AD}$  تقابل  $\angle ACD$ ،  $\overline{AC}$  تقابل  $\angle D$ ، لذا فإن  $\overline{AD} \cong \overline{AC}$ .



الفصل الثالث



## Isosceles Triangles



(1A) سمّ زاويتين متطابقتين غير مشار إلى تطابقهما في الشكل.

(1B) سمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين غير المشار إلى تطابقهما في الشكل.

$\angle FGJ, \angle FJG$  (1A)

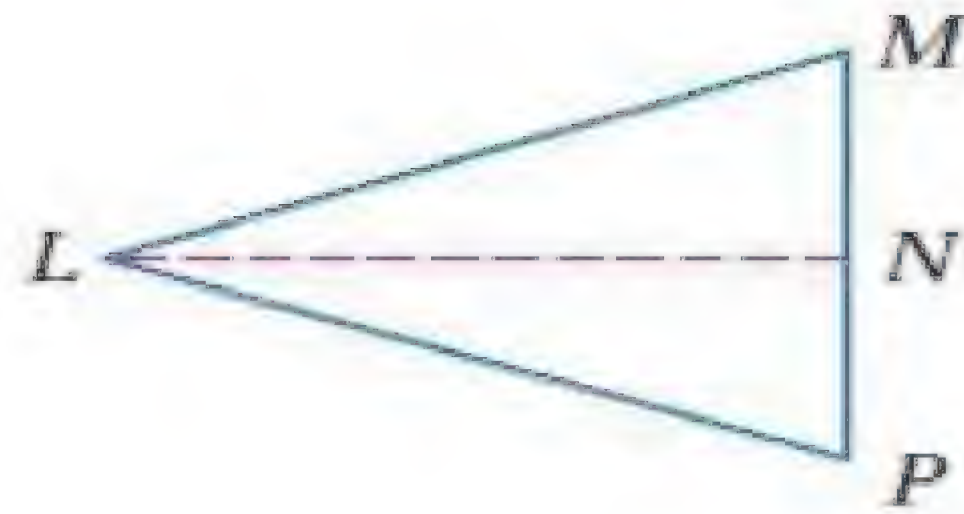
$\overline{GH}, \overline{JH}$  (1B)



## Isosceles Triangles

### نظرية المثلث المتطابق الضلعين

### البرهان



المعطيات: في  $\triangle LMP$ ،  $\overline{LM} \cong \overline{LP}$

المطلوب: إثبات أن:  $\angle M \cong \angle P$

البرهان:

المبررات	العبارات
(1) كل قطعة مستقيمة لها نقطة منتصف واحدة.	(1) افترض أن $N$ نقطة منتصف $\overline{MP}$ .
(2) كل نقطتين تحددان مستقيماً.	(2) ارسم قطعة مساعدة $\overline{LN}$ .
(3) نظرية نقطة المنتصف.	(3) $\overline{PN} \cong \overline{NM}$
(4) خاصية الانعكاس في التطابق.	(4) $\overline{LN} \cong \overline{LN}$
(5) معطى	(5) $\overline{LM} \cong \overline{LP}$
(6) مسلمة التطابق بثلاثة أضلاع.	(6) $\triangle LMN \cong \triangle LPN$
(7) العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين متطابقة.	(7) $\angle M \cong \angle P$

**خصائص المثلث المتطابق الأضلاع:** تقود نظرية المثلث المتطابق الضلعين إلى نتيجتين حول زوايا المثلث

المتطابق الأضلاع.



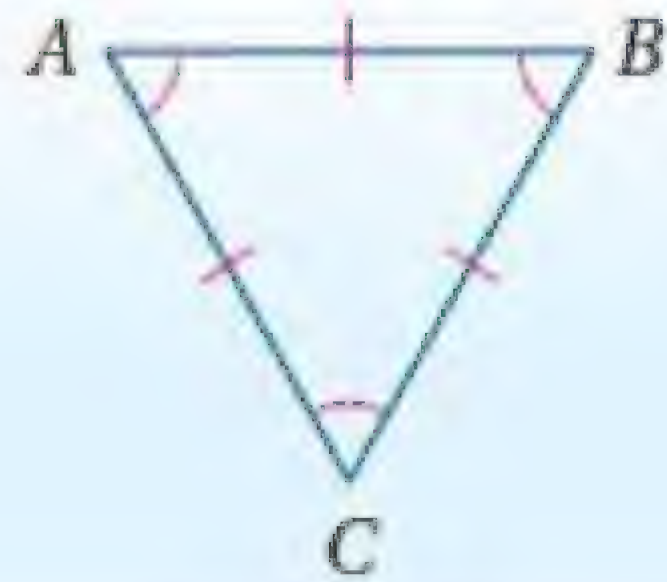
# Isosceles Triangles

## نتيجتان

### المثلث المتطابق الأضلاع

أضف إلى

مطوبتك



**3.3** يكون المثلث متطابق الأضلاع إذا وفقط إذا كان متطابق الزوايا.

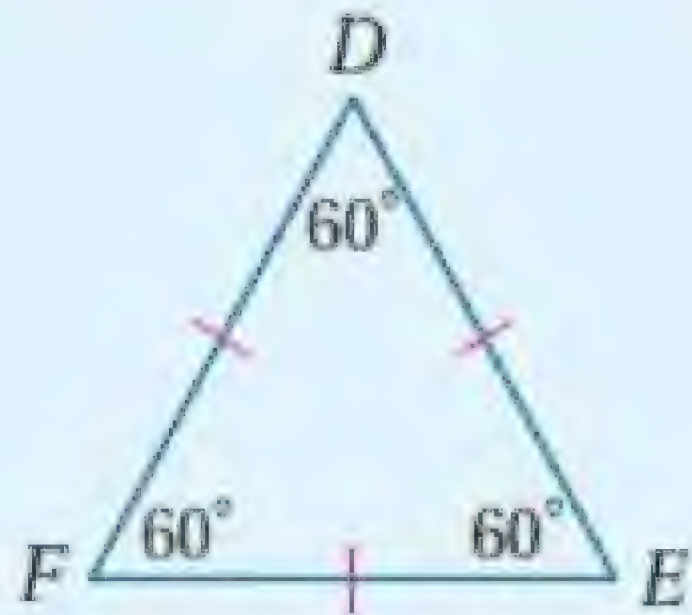
مثال، إذا كان  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$ ، فإن

$$\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{CA}$$

## مراجعة المفردات

المثلث المتطابق  
الأضلاع،

هو مثلث أضلاعه  
الثلاثة متطابقة.



**3.4** قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع  $60^\circ$ .

مثال، إذا كان  $\overline{DE} \cong \overline{EF} \cong \overline{FD}$ ، فإن

$$m\angle E = m\angle F = m\angle D = 60^\circ$$



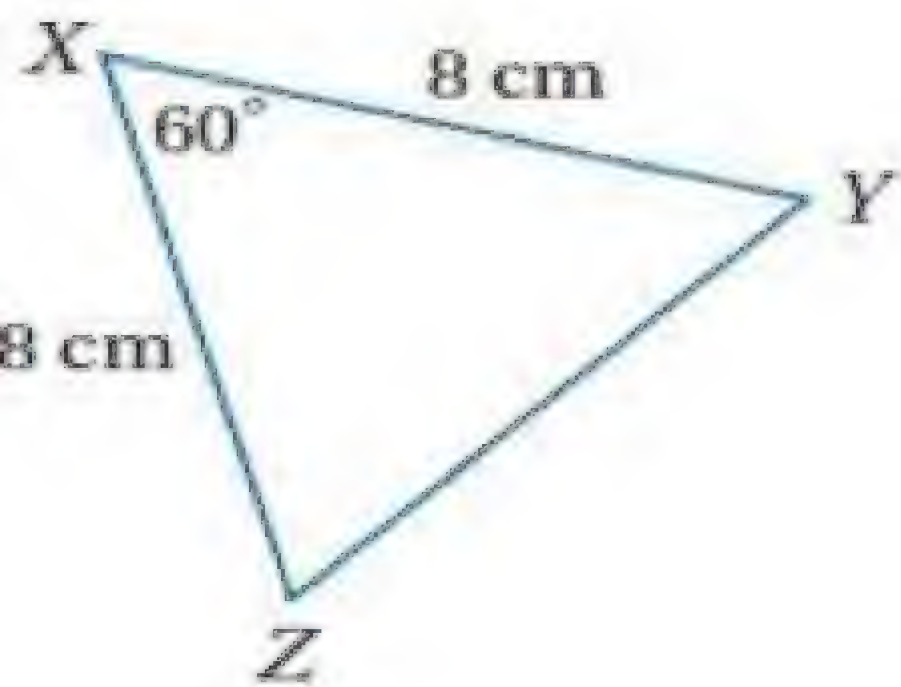
# Isosceles Triangles

## مثال 2

إيجاد القياسات غير المعلومة

أوجد كل قياس من القياسات الآتية:

$m\angle Y$  (a)



بما أن  $XY = XZ$ ,  $\overline{XY} \cong \overline{XZ}$ . وباستعمال نظرية المثلث المتطابق الضلعين، تكون زاويتا القاعدة  $Z, Y$  متطابقتين؛ لذا فإن  $m\angle Z = m\angle Y$ . استعمال نظرية مجموع زوايا المثلث لإيجاد  $m\angle Y$ .

نظرية مجموع زوايا المثلث

$$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z = 180^\circ$$

$$m\angle X = 60^\circ, m\angle Z = m\angle Y$$

$$60^\circ + m\angle Y + m\angle Y = 180^\circ$$

بالتبسيط

$$60^\circ + 2(m\angle Y) = 180^\circ$$

ب طرح 60 من كل طرف

$$2(m\angle Y) = 120^\circ$$

بقسمة كل طرف على 2

$$m\angle Y = 60^\circ$$

YZ (b)

$m\angle Z = m\angle Y$ ؛ لذا بالتعويض فإن  $m\angle Z = 60^\circ$ . وبما أن  $m\angle X = 60^\circ$ ، فإن قياس كل زاوية من الزوايا الثلاث  $60^\circ$ ؛ لذا فالمثلث متطابق الزوايا. وهو متطابق الأضلاع أيضًا  $XY = XZ = ZY$ . وبما أن

$$XY = 8 \text{ cm}, \text{ فإن } YZ = 8 \text{ cm}$$



إرشادات للدراسة

مثال 3

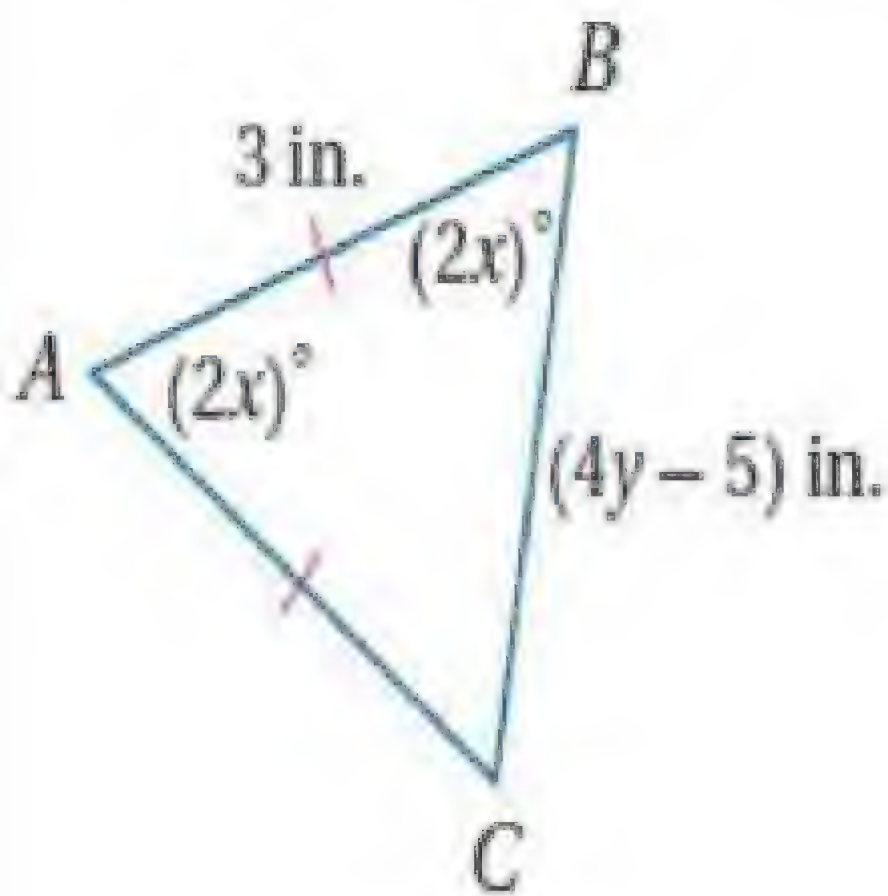
إيجاد القيم المجهولة

المثلثات المتطابقة  
الضلعين

كما اكتشفت في  
المثال 2، أي مثلث  
متطابق الضلعين فيه  
الزاوية  $60^\circ$  يكون مثلثاً  
متطابق الأضلاع.

**جبر:** أوجد قيمة كل متغير في الشكل المجاور. بما أن  $\angle A = \angle B$  فإن  $\overline{AC} \cong \overline{BC}$  باستعمال عكس نظرية  
المثلث المتطابق الضلعين؛ وبذلك فإن أضلاع المثلث متطابقة. وقياس كل  
زاوية فيه تساوي  $60^\circ$ ؛ لذا فإن  $2x = 60$ ،  $x = 30$ .

وبما أن المثلث متطابق الأضلاع، فإن جميع الأضلاع متطابقة، وأطوالها  
متساوية.



تعريف المثلث المتطابق الأضلاع

$$AB = BC$$

بالتعويض

$$3 = 4y - 5$$

بإضافة 5 إلى كل من الطرفين

$$8 = 4y$$

بقسمة كل طرف على 4

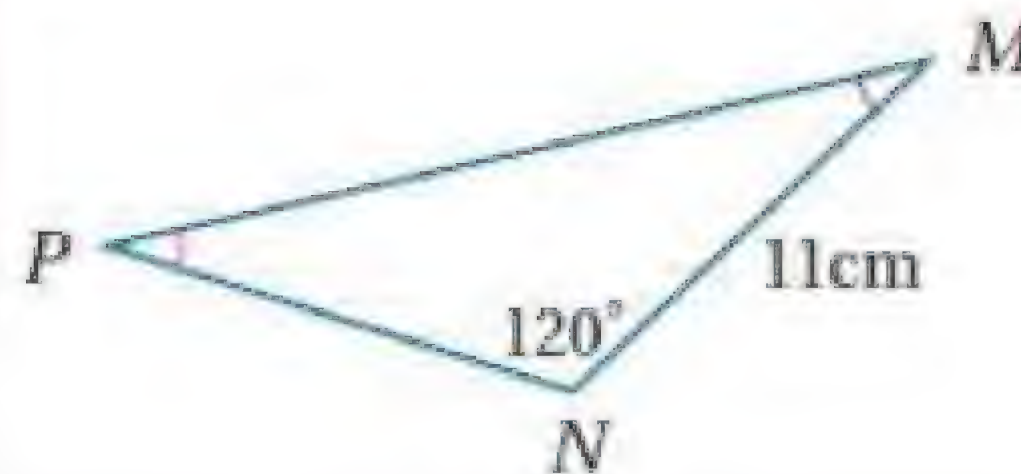
$$2 = y$$



## Isosceles Triangles

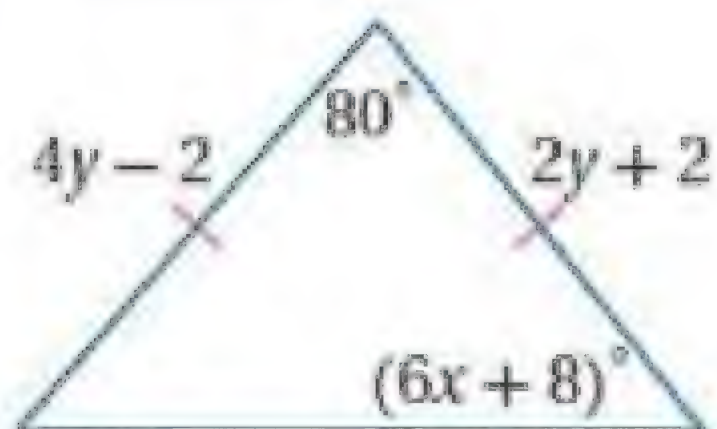
**PN (2B)**

**11 cm**



**$m\angle M$  (2A)**

**$30^\circ$**



**(3) أوجد قيمة كل من المتغيرين في الشكل المجاور .**

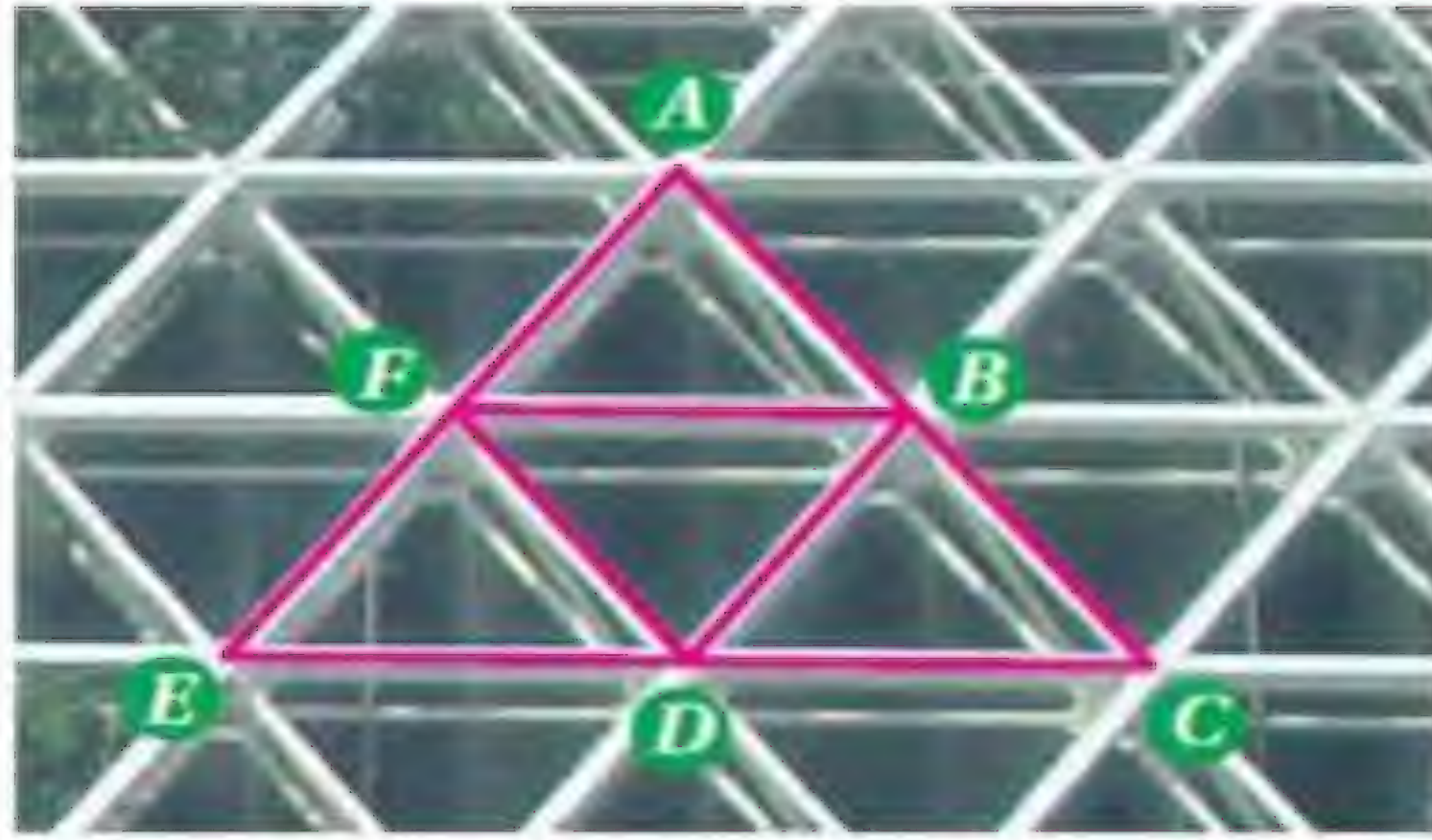
**$x = 7, y = 2$**



# Isosceles Triangles

## تطبيق تطابق المثلثات

## مثال 4 من واقع الحياة



**مباني:** انظر إلى الصورة المجاورة.  $\triangle ACE$  مثلث متطابق الأضلاع.  $F$  نقطة منتصف  $\overline{AE}$ ،  $D$  نقطة منتصف  $\overline{EC}$ ،  $B$  نقطة منتصف  $\overline{CA}$ . برهن أن  $\triangle FBD$  متطابق الأضلاع.

**المعطيات:**  $\triangle ACE$  متطابق الأضلاع،  $F$  نقطة منتصف  $\overline{AE}$ ،  $D$  نقطة منتصف  $\overline{EC}$ ، و  $B$  نقطة منتصف  $\overline{CA}$

**المطلوب:** إثبات أن:  $\triangle FBD$  متطابق الأضلاع.

**البرهان:**

المبررات	العبارات
(1) معطى	(1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع.
(2) معطى	(2) $F$ نقطة منتصف $\overline{AE}$ ، $D$ نقطة منتصف $\overline{EC}$ ، $B$ نقطة منتصف $\overline{CA}$ .
(3) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60^\circ$	(3) $m\angle A = 60^\circ$ , $m\angle C = 60^\circ$ , $m\angle E = 60^\circ$
(4) تعريف التطابق والتعويض	(4) $\angle A \cong \angle C \cong \angle E$
(5) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع	(5) $\overline{AE} \cong \overline{EC} \cong \overline{CA}$
(6) تعريف التطابق	(6) $AE = EC = CA$



## Isosceles Triangles

(7) نظرية نقطة المنتصف	$\overline{AF} \cong \overline{FE}, \overline{ED} \cong \overline{DC}, \overline{CB} \cong \overline{BA}$ (7)
(8) تعريف التطابق	$AF = FE, ED = DC, CB = BA$ (8)
(9) مسأمة جمع القطع المستقيمة	$AF + FE = AE, ED + DC = EC,$ $CB + BA = CA$ (9)
(10) بالتعويض	$AF + AF = AE, FE + FE = AE,$ $ED + ED = EC, DC + DC = EC,$ $CB + CB = CA, BA + BA = CA$ (10)
(11) خاصية الجمع	$2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = EC,$ $2DC = EC, 2CB = CA, 2BA = CA$ (11)
(12) خاصية التعويض	$2AF = AE, 2FE = AE, 2ED = AE,$ $2DC = AE, 2CB = AE, 2BA = AE$ (12)
(13) خاصية التعدي	$2AF = 2ED = 2CB,$ $2FE = 2DC = 2BA$ (13)
(14) خاصية القسمة	$AF = ED = CB, FE = DC = BA$ (14)
(15) تعريف التطابق	$\overline{AF} \cong \overline{ED} \cong \overline{CB}, \overline{FE} \cong \overline{DC} \cong \overline{BA}$ (15)
(16) مسأمة SAS	$\triangle AFB \cong \triangle EDF \cong \triangle CBD$ (16)
(17) العناصر المتناظرة متطابقة.	$\overline{DF} \cong \overline{FB} \cong \overline{BD}$ (17)
(18) تعريف المثلث المتطابق الأضلاع	$\triangle FBD$ متطابق الأضلاع. (18)



## Isosceles Triangles

(4) إذا علمت أن  $\triangle ACE$  متطابق الأضلاع، فيه  $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$ ,  $\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$ ,  $D$  نقطة منتصف  $\overline{EC}$ ,

فأثبت أن  $\triangle FED \cong \triangle BDC$ .

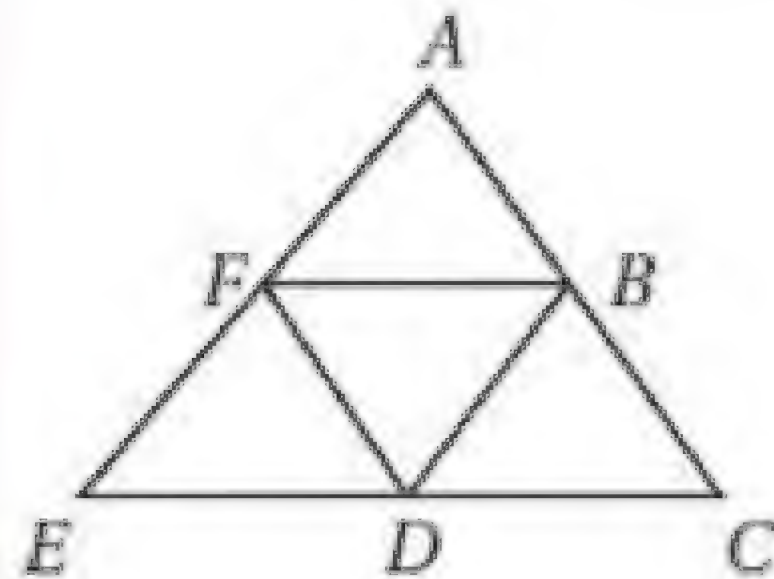
(4) المعطيات:  $\triangle ACE$  متطابق الأضلاع فيه  $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$

$\overline{FD} \parallel \overline{BC}$ ,  $\overline{BD} \parallel \overline{EF}$

والنقطة  $D$  نقطة منتصف  $\overline{EC}$ .

المطلوب:  $\triangle FED \cong \triangle BDC$

البرهان:

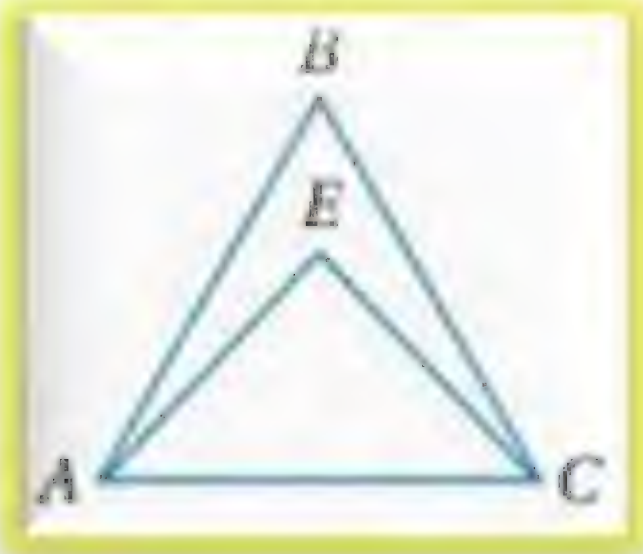


المبررات	العبارات
(1) معطيات	(1) $\triangle ACE$ متطابق الأضلاع $\overline{FB} \parallel \overline{EC}$ . $D$ نقطة منتصف $\overline{EC}$ .
(2) قياس كل زاوية في المثلث المتطابق الأضلاع يساوي $60^\circ$	(2) $m\angle E = 60^\circ$ , $m\angle C = 60^\circ$
(3) خاصية التبعدي للتطابق	(3) $m\angle E = m\angle C$
(4) تعريف التطابق	(4) $\angle E \cong \angle C$
(5) نظرية نقطة المنتصف	(5) $\overline{ED} \cong \overline{DC}$
(6) نظرية الزاويتين المتبادلتين داخلياً	(6) $\angle CBD \cong \angle BDF$ , $\angle EFD \cong \angle BDF$
(7) خاصية التبعدي للتطابق	(7) $\angle CBD \cong \angle EFD$
(8) AAS	(8) $\triangle FED \cong \triangle BDC$



لا تأكد

المثال ١



باستعمال الشكل المجاور أجب عن السؤالين الآتيين:

١) إذا كان  $\overline{AB} \cong \overline{CB}$  ، فسم زاويتين متطابقتين.

١)  $\angle BAC$  ،  $\angle BCA$

٢) إذا كان  $\angle EAC \cong \angle ECA$  ، فسم قطعتين مستقيمتين متطابقتين.

٢)  $\overline{EA}$  ،  $\overline{EC}$

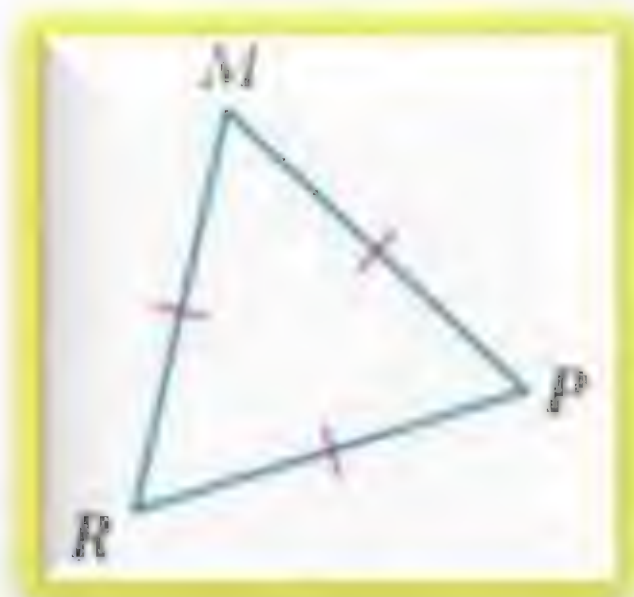
الجل



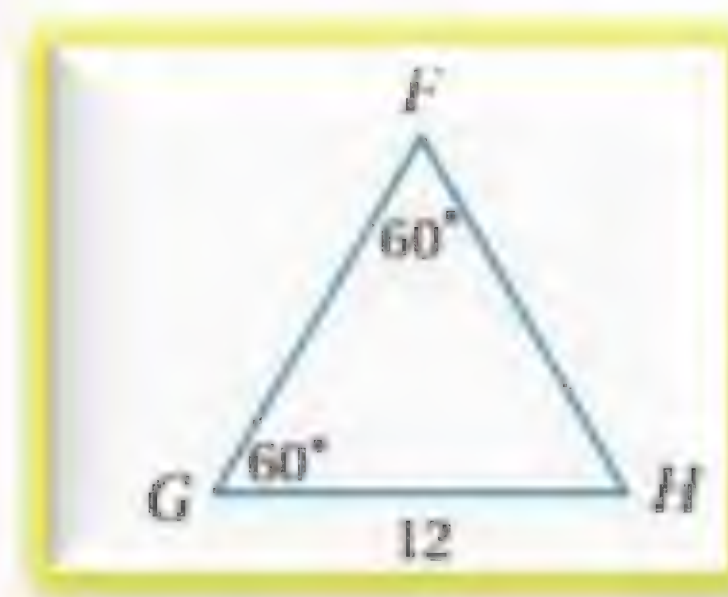
أوجد كلا من القياسين الآتيين

المثال ٢

$m\angle MRP$  (4)



$FH$  (3)



حسب نتيجة 3.4

قياس كل زاوية 60 في المثلث

المتطابق الاضلاع = 60

$\angle MRP = 60$

$\therefore \angle F = \angle G$

$\therefore GH = FH$

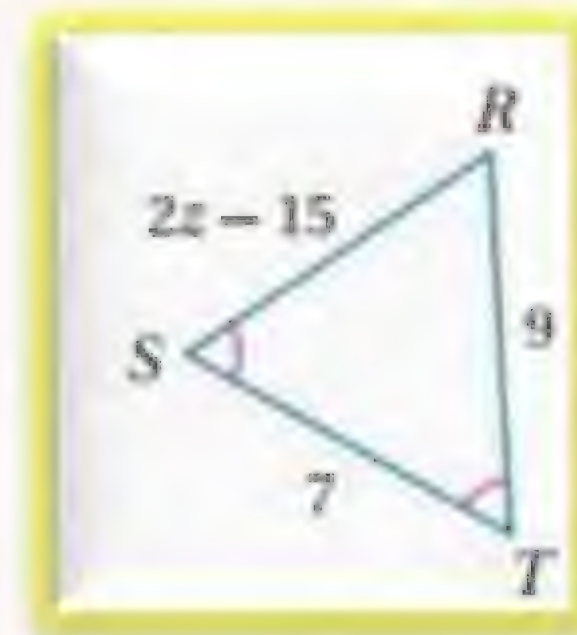
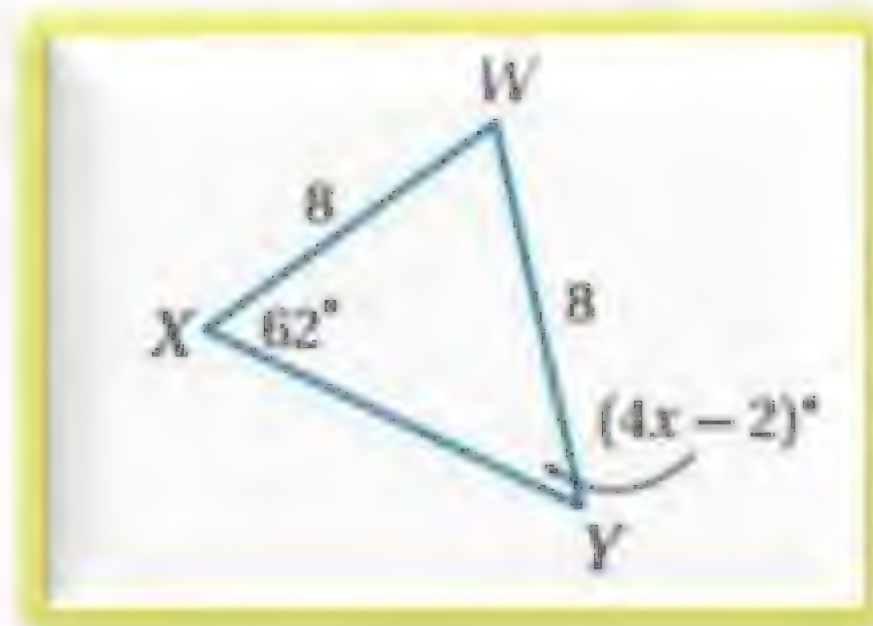
$FH = 12$





جبر : اوجد قيمة المتغير في كل من المثلثين الآتيين :

المثال ٣

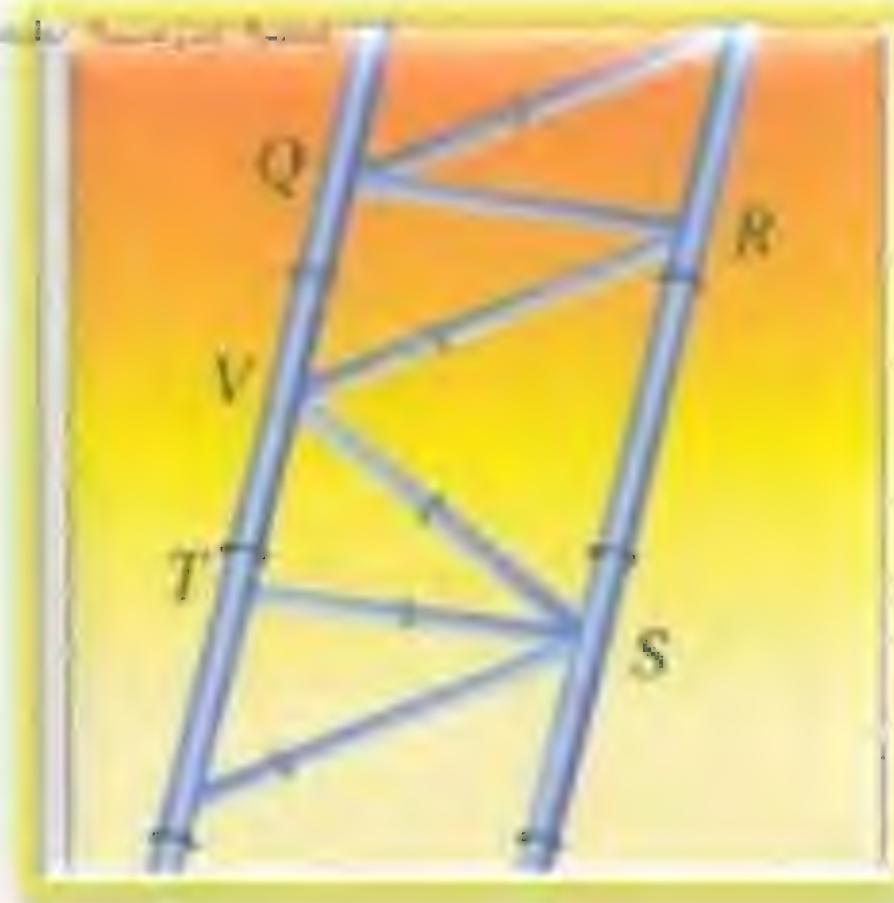


$$\begin{aligned}
 &\because WY = XY \\
 &\angle WYX = \angle WXY \\
 &4x - 2 = 62 \\
 &4x = 64 \\
 &x = 16
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\because \angle S = \angle T \\
 &RT = RS \\
 &9 = 2z - 15 \\
 &2z = 9 + 15 \\
 &2z = 24 \\
 &z = 12
 \end{aligned}$$







(7) القاطرة السريعة : الشكل المجاور يظهر جزءاً من مكة القاطرة السريعة الحبيبة في فقرة "لماذا؟" مكوّنة من مثلثات.

(a) إذا كان  $\overline{ST}$ ،  $\overline{QR}$  عموديان على  $\overline{QT}$ ، و  $\triangle RVS$  متطابق الضلعين قاعدته  $\overline{RS}$ ،  $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$ ، فأثبت أن  $\triangle RQV \cong \triangle STV$ .

(a) المعطيات:  $\overline{ST}$  و  $\overline{QR}$  عموديان على  $\overline{QT}$ ،

المطلوب:  $\triangle RQV \cong \triangle STV$

البرهان:

•  $\overline{ST}$  و  $\overline{QR}$  عموديان على  $\overline{QT}$ ، و  $\triangle RVS$  متطابق الضلعين و قاعدته  $\overline{SR}$  و  $\overline{QT} \parallel \overline{SR}$  (معطى)

•  $\angle RQV$ ،  $\angle STV$  زوايا قائمة

•  $\angle RQV \cong \angle STV$  تعريف الزاوية القائمة

•  $\overline{VR} \cong \overline{VS}$  تعريف المثلث المتطابق الضلعين

•  $\angle VSR \cong \angle VRS$  تعريف المثلث المتطابق الضلعين

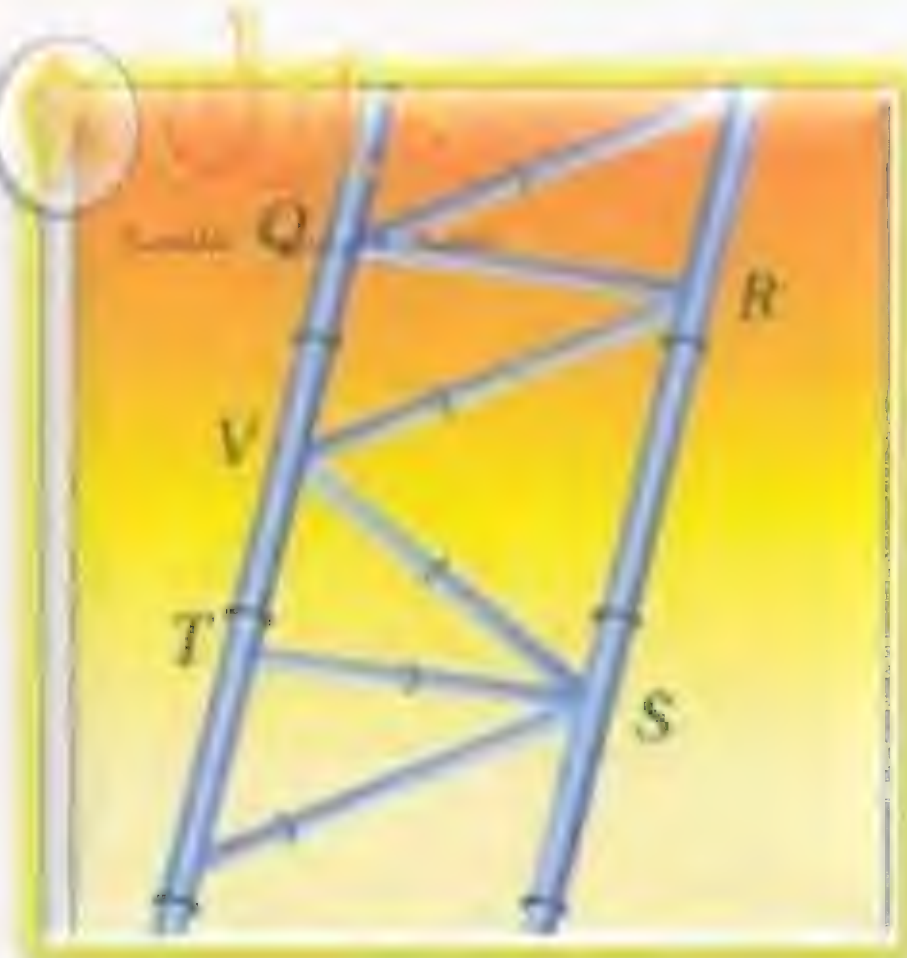
•  $\angle QVR \cong \angle VRS$ ،  $\angle TVS \cong \angle VRS$

•  $\angle TVS \cong \angle QVR$

•  $\angle RQV \cong \angle STV$  حسب مسلمة AAS







(b) إذا كان  $QR = 2\text{ m}$  ،  $VR = 2.5\text{ m}$  ، فأوجد البعد بين المستقيمين  $\overleftrightarrow{QR}$  و  $\overleftrightarrow{ST}$  . برّر إجابتك.

الحل

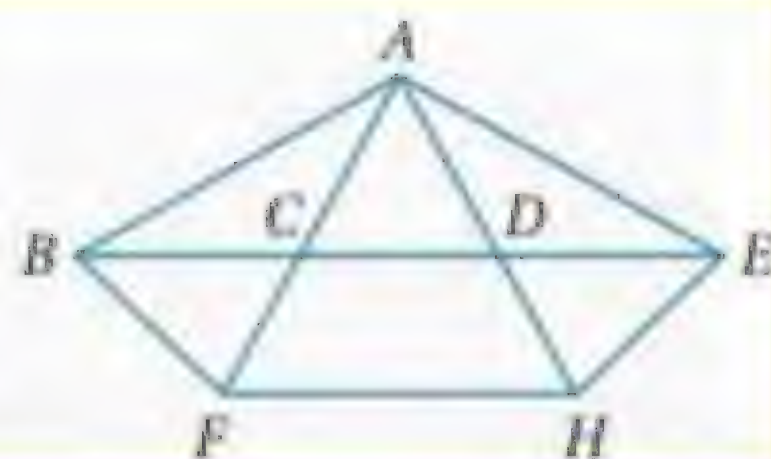
إذن  $VT = 1.5\text{ m}$   
 $\therefore QV + VT = QT$   
 $1.5 + 1.5 = QT$   
 $QT = 3\text{ m}$

(b) من نظرية فيثاغورث  $QV = \sqrt{2.5^2 - 2^2} = 1.5\text{ m}$   
 وحيث أن الاضلاع المتناظرة في المثلثين المتطابقين يكونوا متطابقين

✓ تدرب وحل المسائل

بمستعمل الشكل المجاور اجب عن الاسئلة الآتية

المثال 1



- (8) إذا كان  $\overline{AB} \cong \overline{AE}$  ، فسمّ زاويتين متطابقتين .  
 (9) إذا كانت  $\angle ABF \cong \angle AFB$  ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين .  
 (10) إذا كانت  $\overline{CA} \cong \overline{DA}$  ، فسمّ زاويتين متطابقتين .  
 (11) إذا كانت  $\angle DAE \cong \angle DEA$  ، فسمّ قطعتين مستقيمتين متطابقتين .

الحل

8)  $\angle ABE$  ,  $\angle AEB$

9)  $AB$  ,  $AF$

10)  $\angle ACD$  ,  $\angle ADC$

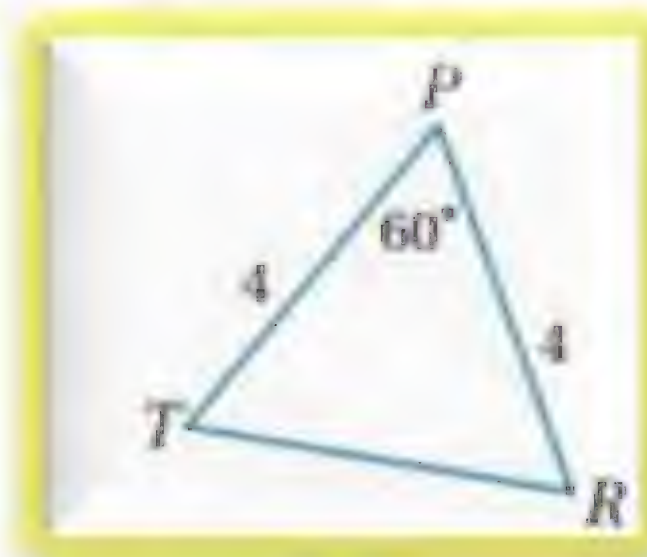
11)  $AD$  ,  $DE$



أوجد كلًا من القياسين الآتيين:

المثال ٢

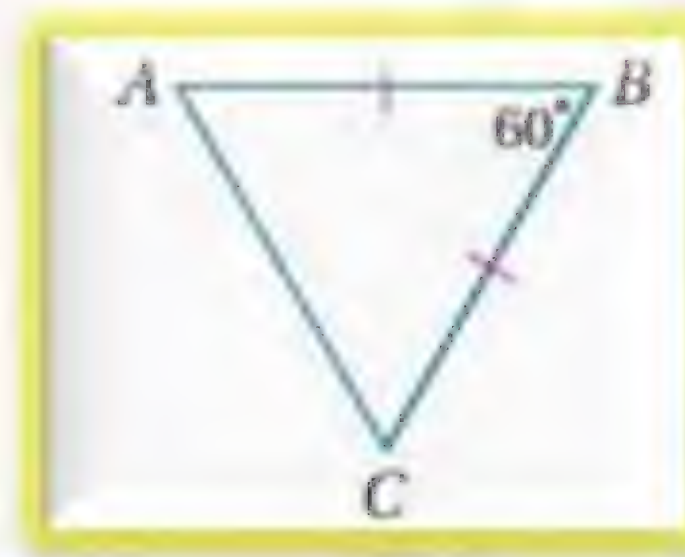
TR (13)



$\because PR = PT$   
 $\therefore \angle R = \angle T$   
 $\therefore \angle R = \angle T = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$   
 $PR = PT = TR$   
 $TR = 4cm$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين

$m\angle BAC$  (12)



$\because AB = BC$   
 $\therefore \angle A = \angle C$   
 $\angle A = \angle C = (180^\circ - 60^\circ) \div 2 = 60^\circ$   
 $m\angle BAC = 60^\circ$

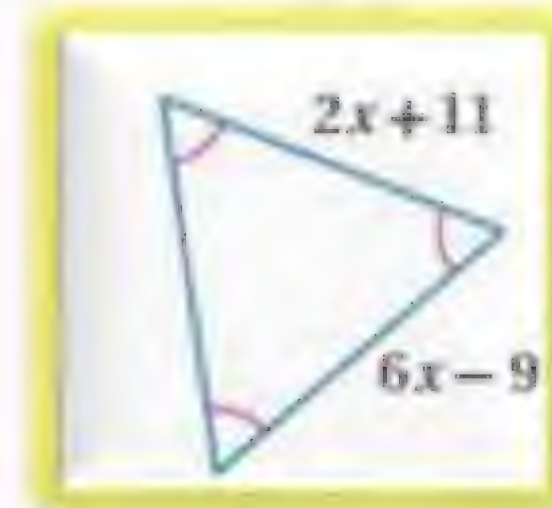
نظرية المثلث المتطابق الضلعين



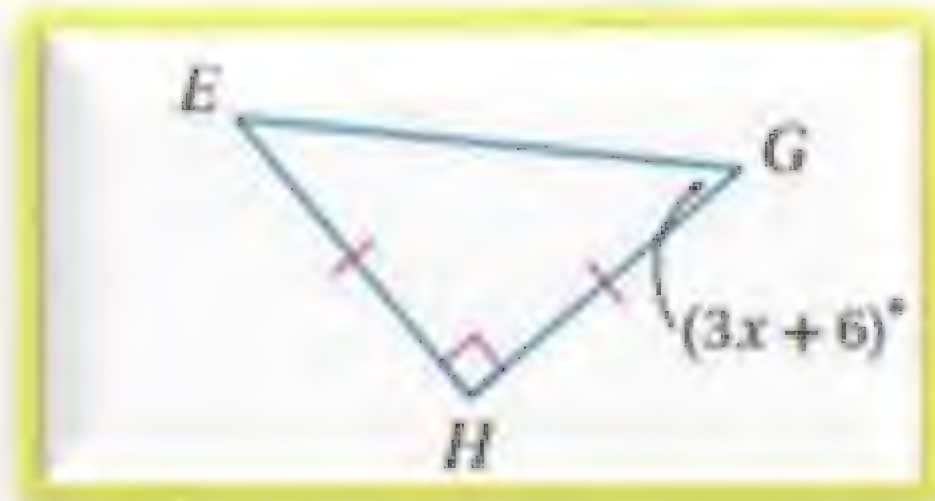


### المثال ٣

جبر، أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



بما أن جميع زوايا المثلث متطابقة إذن الأضلاع متطابقة حسب عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين.



$$6x - 9 = 2x + 11$$

$$6x - 2x = 11 + 9$$

$$4x = 20$$

$$x = 5$$

$$\therefore HG = HE$$

$$\therefore \angle E = \angle G = 45^\circ$$

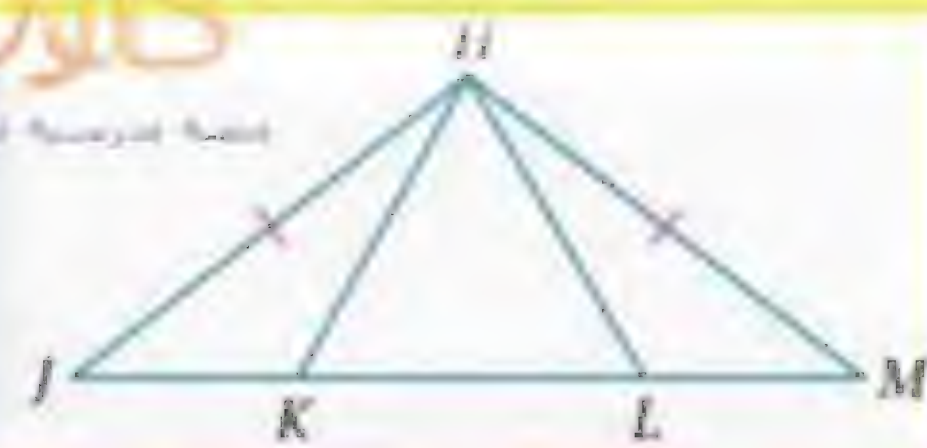
$$3x + 6 = 45$$

$$3x = 39$$

$$x = 13$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين.





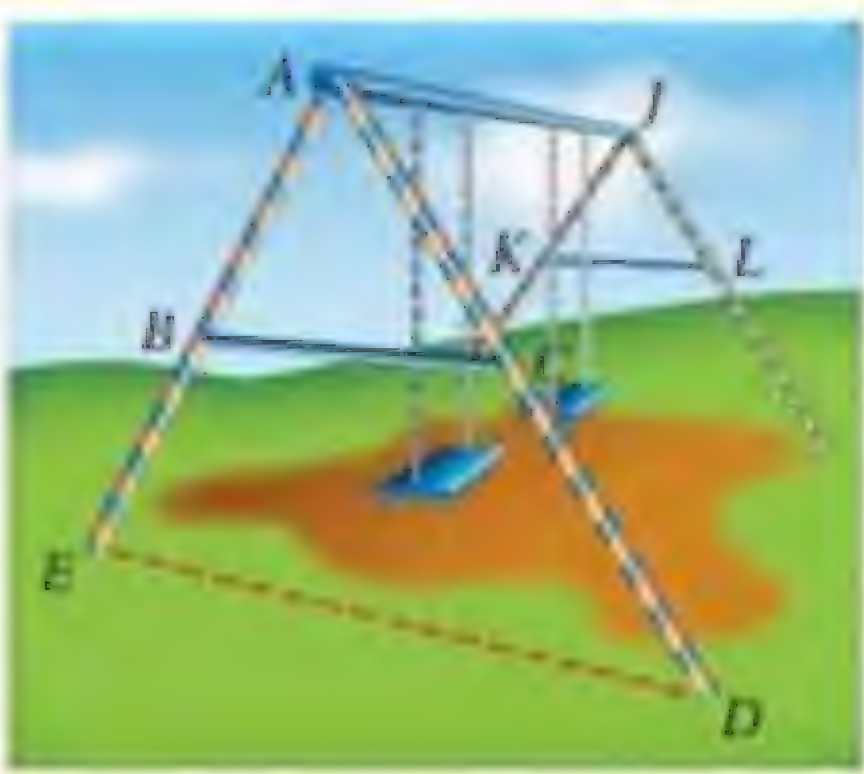
برهان، اكتب برهانًا حرًا.

(16) المعطيات،  $\triangle HJM$  متطابق الضلعين،  
 $\triangle HKL$  متطابق الأضلاع.  
 المطلوب إثبات أن،  $\angle JHK \cong \angle MHL$

المثال ٤

الحل

بما أن  $HM = HJ$  إذن  $\angle HMJ = \angle HJM$   
 وبما أن  $\triangle HKL$  متطابق الأضلاع إذن  $\angle HKJ = \angle HLM$  لأن  
 $\angle HKL = \angle HLK$  من تطابق المثلث  
 إذن  $\triangle HKJ \cong \triangle HLM$  حسب نظرية A.A.S.  
 ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين متطابقة فإن  $\angle JHK = \angle MHL$



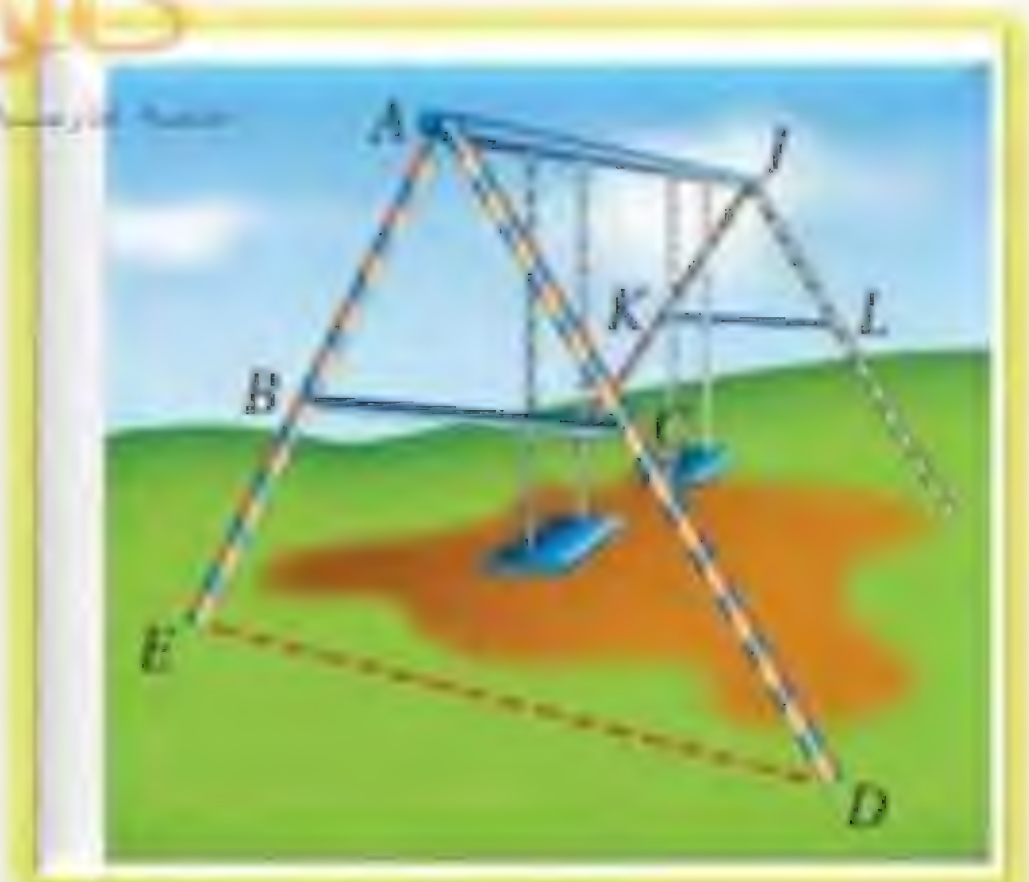
(17) حدائق، اصطحاب خالد أخاه الأصغر إلى حديقة الحي،  
 فلاحظ أن دعائم الأرجوحة الموجودة في الحديقة تشكل  
 مجموعتين من المثلثات، وأن  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  ولكن  $\overline{BC} \neq \overline{AB}$ .

أ) إذا قدر خالد أن  $m\angle BAC = 50^\circ$ ، فما قيمة  $m\angle ABC$  وفقا  
 لهذا التقدير؟ وضح إجابتك.

الحل

بما أن  $\overline{AB} \cong \overline{AC}$  إذن  $\angle ABC = \angle ACB$   
 حسب نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث:  $180^\circ - 50^\circ = \angle ABC + \angle ACB$   
 $130^\circ = \angle ABC + \angle ABC$  (خاصية التوزيع)  
 $65^\circ = \angle ABC$





(b) إذا كان  $\overline{BE} \cong \overline{CD}$ ، فبيّن أن  $\triangle AED$  متطابق الضلعين.

(c) إذا كان  $\overline{ED} \cong \overline{AD}$ ،  $\overline{BC} \parallel \overline{ED}$ ، فبيّن أن  $\triangle AED$  متطابق الأضلاع.

المبررات	العبارات
معطيات	$AB \cong AC, BE \cong CD$
تعريف تطابق القطع المستقيمة	$AB = AC, BE = CD$
مسلمة جمع القطع المستقيمة	$AB + BE = AE$
مسلمة جمع القطع المستقيمة	$AC + CD = AD$
خاصية الجمع للمساواة	$AB + BE = AC + CD$
تعريف تطابق القطع المستقيمة	$AE = AD$
تعريف المثلث المتطابق الضلعين	مثلث $AED$ متطابق الضلعين

(1)  $\overline{AB} \cong \overline{AC}, \overline{BC} \parallel \overline{ED}, \overline{ED} \cong \overline{AD}$  (معطيات)

(2)  $\angle ABC \cong \angle ACB$  (نظرية المثلث متطابق الضلعين)

(3)  $\angle ABC = \angle ACB$  (تعريف تطابق الزوايا)

(4)  $\angle ABC \cong \angle AED, \angle ACB \cong \angle ADE$  (زوايا متناظرة)

(5)  $\angle ABC = \angle AED, \angle ACB = \angle ADE$  (تعريف تطابق الزوايا)

(6)  $m \angle AED = m \angle ACB$  (بالتعويض)

(7)  $m \angle AED = m \angle ADE$  (بالتعويض)

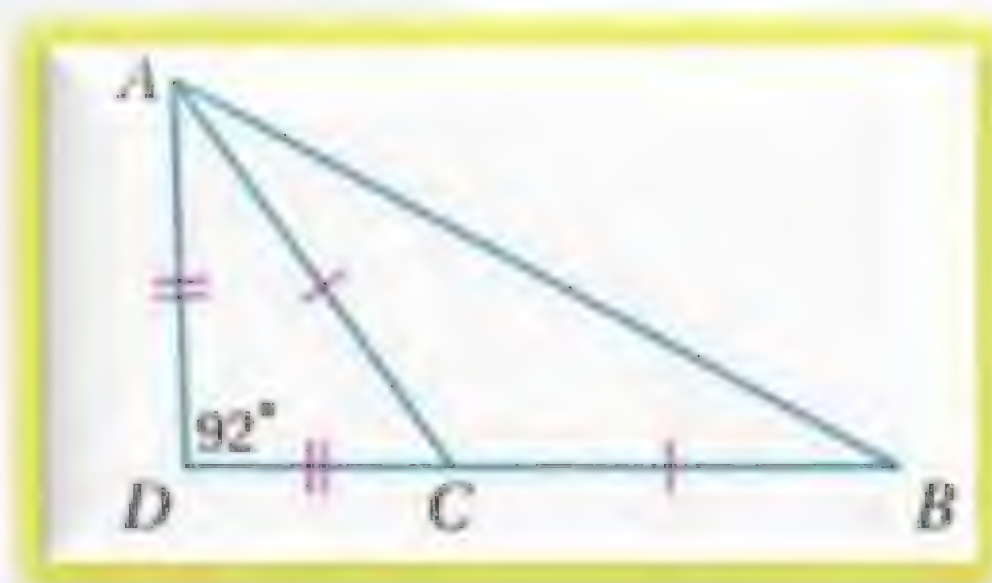
(8)  $\angle AED \cong \angle ADE$  (تعريف تطابق الزوايا)

(9)  $\overline{AD} \cong \overline{AE}$  (عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين)

(10)  $\triangle AED$  متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)



أوجد كلا من القياسات الآتية:



$m\angle ACD$  (19)

$$\begin{aligned}
 &\because DA = DC \\
 &\angle CAD = \angle ACD \\
 &2\angle ACD = 180^\circ - 92^\circ \\
 &\angle ACD = 44^\circ
 \end{aligned}$$

$m\angle ABC$  (21)

$$\begin{aligned}
 &\because AC = CB \\
 &\angle CAB = \angle ABC \\
 &2\angle ABC = 180^\circ - \angle ACB \\
 &2\angle ABC = 180^\circ - 136^\circ \\
 &\angle ABC = 22^\circ
 \end{aligned}$$

$m\angle CAD$  (18)

$$\begin{aligned}
 &\because DA = DC \\
 &\angle CAD = \angle ACD \\
 &2\angle CAD = 180^\circ - 92^\circ \\
 &\angle CAD = 44^\circ
 \end{aligned}$$

$m\angle ACB$  (20)

$$\begin{aligned}
 &\angle ACB = 180^\circ - \angle ACD \\
 &\angle ACB = 180^\circ - 44^\circ \\
 &\angle ACB = 136^\circ
 \end{aligned}$$





يرغب بالكتب برهاناً إذا عمودي لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

(22) النتيجة 3.3



الحالة الأولى:

- (1)  $\Delta ABC$  متطابق الأضلاع (معطى)
- (2)  $AB \cong AC \cong BC$  (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)
- (3)  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$  (تعريف المثلث المتطابق الضلعين)
- (4)  $\Delta ABC$  متطابق الزوايا (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)

الحالة الأولى:

- (1)  $\Delta ABC$  متطابق الزوايا (معطى)
- (2)  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$  (تعريف المثلث المتطابق الزوايا)
- (3)  $AB \cong AC \cong BC$  (إذا تطابقت زاويتان في مثلث فإن الضلعين المقابلين لهما يكونان متطابقين)
- (4)  $\Delta ABC$  متطابق الأضلاع (تعريف المثلث المتطابق الأضلاع)



برهان: اكتب برهاناً عمودياً لكل نتيجة أو نظرية مما يأتي:

(23) النتيجة 3.4



- (1)  $\triangle ABC$  متطابق الأضلاع ( معطى )
- (2)  $\overline{AB} \cong \overline{AC} \cong \overline{BC}$  ( تعريف المثلث المتطابق الأضلاع )
- (3)  $\angle A \cong \angle B \cong \angle C$  ( نظرية المثلث المتطابق الضلعين )
- (4)  $m \angle A = m \angle B = m \angle C$  ( تعريف التطابق )
- (5)  $m \angle A + m \angle B + m \angle C = 180^\circ$  ( نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث )
- (6)  $m \angle A = 60^\circ$  ( خاصية القسمة )
- (7)  $m \angle A = m \angle B = m \angle C = 60^\circ$  ( بالتعويض )



برهان : اكتب برهاناً ذا عمودي لكل نتيجة او نظرية مما يأتي:

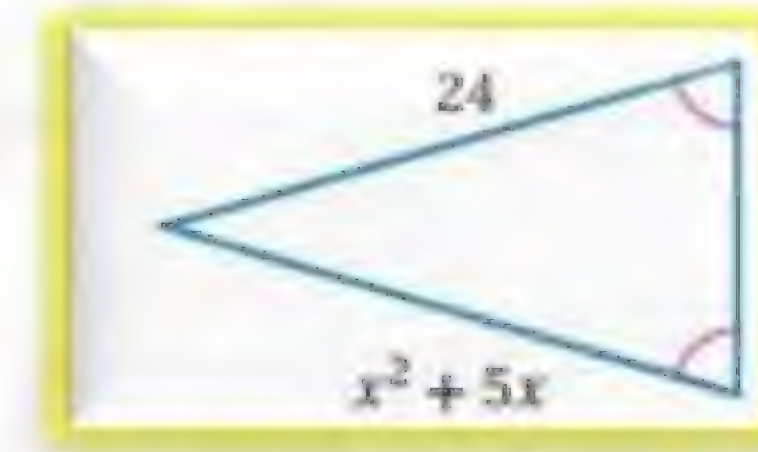
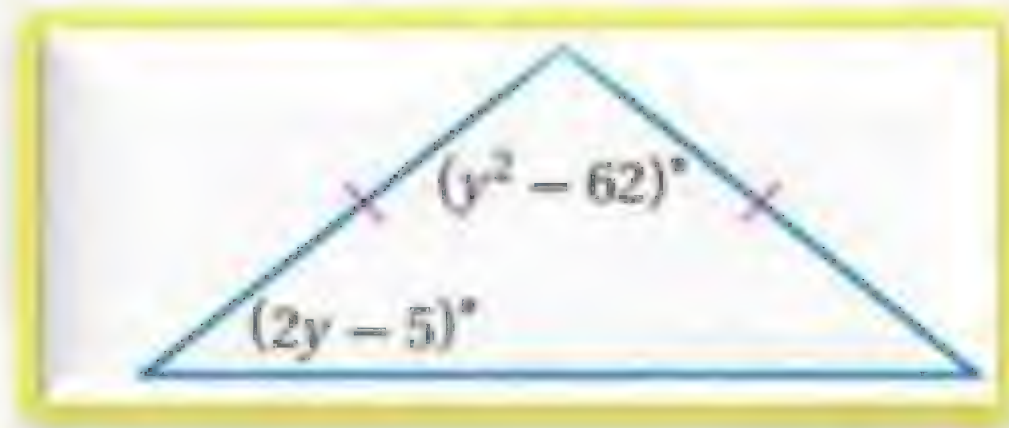
(24) النظرية 3.11



- (1) افترض أن  $BD$  ينصف  $\angle ABC$  (مسلمة المنقلة)
  - (2)  $\angle ABD \cong \angle CBD$  (تعريف منصف الزاوية )
  - (3)  $\angle A \cong \angle C$  (معطى)
  - (4)  $BD \cong BD$  (خاصية الانعكاس)
  - (5)  $\triangle ABD \cong \triangle CBD$  (AAS)
  - (6)  $CB \cong AB$
- (العناصر المتناظرة في مثلثين متطابقين تكون متطابقة)



أوجد قيمة المتغير في كل من السؤالين الآتيين:



$$\begin{aligned}
 (Y^2 - 62) + 2(2Y - 5) &= 180 \\
 Y^2 - 62 + 4Y - 10 &= 180 \\
 Y^2 + 4Y - 62 - 190 &= 0 \\
 Y^2 + 4Y - 252 &= 0 \\
 (Y + 18)(Y - 14) &= 0 \\
 Y &= -18 \\
 Y &= 14 \\
 Y &= -18 \quad \times
 \end{aligned}$$

$$x^2 + 5x = 24$$

$$x^2 + 5x - 24 = 0$$

$$(x - 3)(x + 8) = 0$$

$$x = 3$$

$$x = -8 \quad \times$$

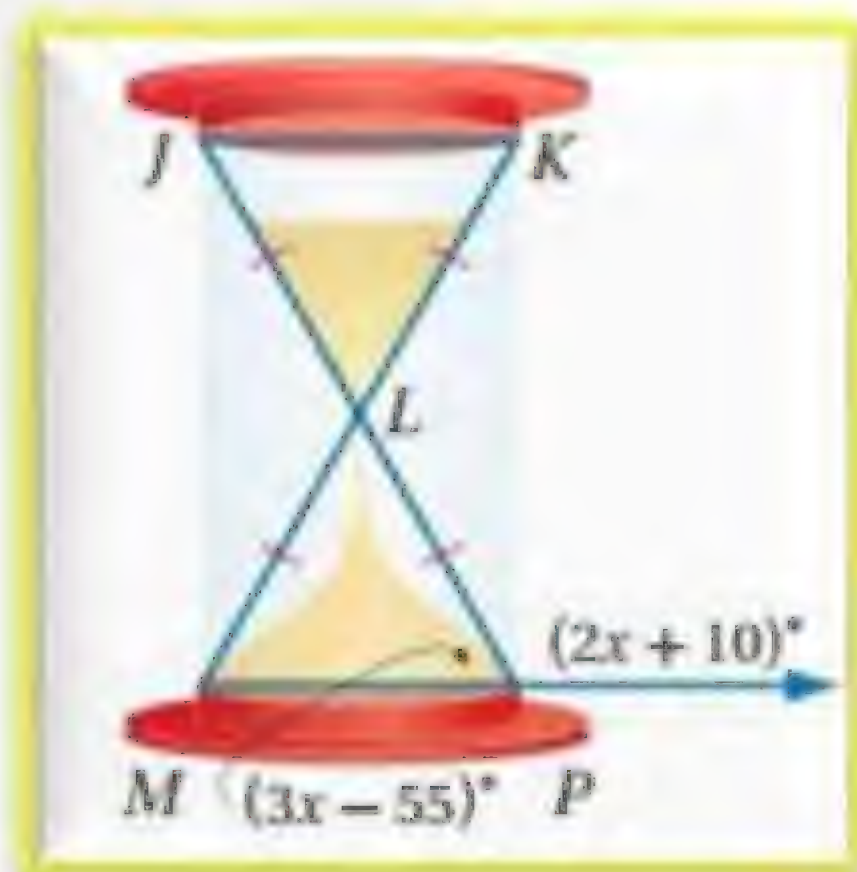
عكس نظرية المثلث المتطابق الضلعين



الساعات الرملية : استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلاً من القياسات الآتية:

$m\angle LPM$  (27)

الحل



$$(2x + 10) + (3x - 55) = 180^\circ$$

$$5x - 45 = 180$$

$$5x = 180 + 45$$

$$x = 45$$

$$\angle LPM = (3x - 55) = 3 \times 45 - 55$$

$$\angle LPM = 80^\circ$$

زاويتان متجاورتان على مستقيمين

$m\angle LMP$  (28)

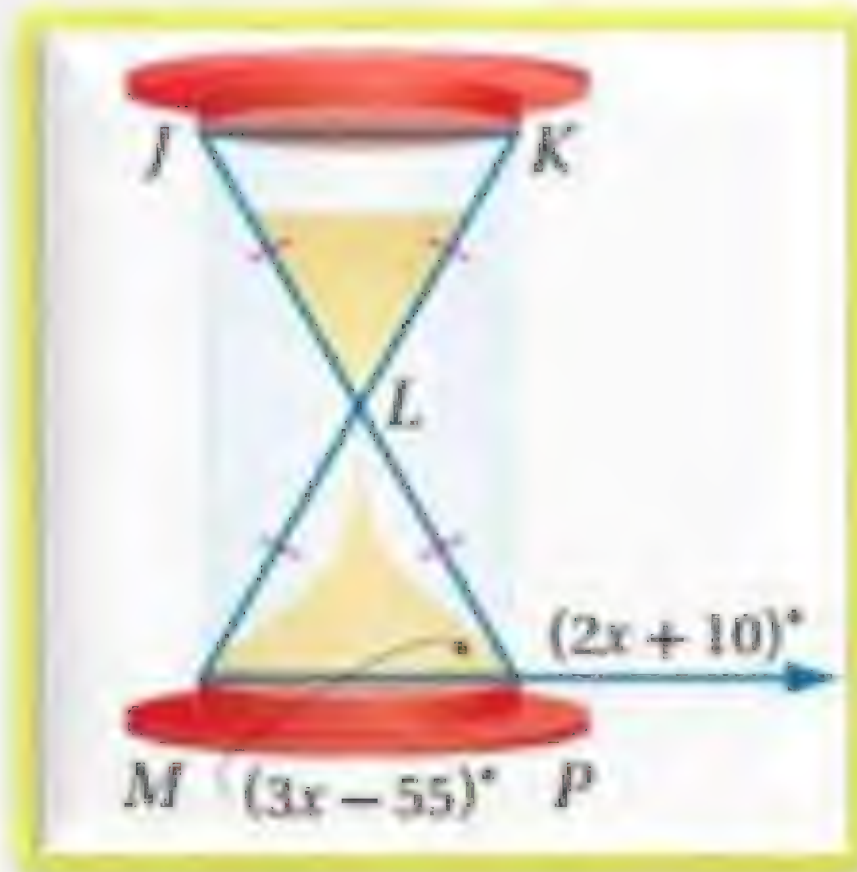
$$\therefore LP = LM$$

$$\angle LPM = \angle LMP = 80^\circ$$

نظرية المثلث المتطابق الضلعين



الساعات الرملية : استعمل الساعة الرملية المبينة في الشكل المجاور، وأوجد كلاً من القياسات الآتية:



$$m\angle JLK \quad (29)$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle MLP = 20^\circ$$

$$\angle MLP = \angle JLK = 20^\circ$$

زاويتان متقابلتان بالرأس



$$m\angle JKL \quad (30)$$

نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث

$$\angle JKL + \angle KJL = 160^\circ$$

$$\therefore LK = JL$$

$$\therefore \angle JKL = \angle KJL$$

$$2\angle JKL = 160^\circ$$

$$\angle JKL = 80^\circ$$

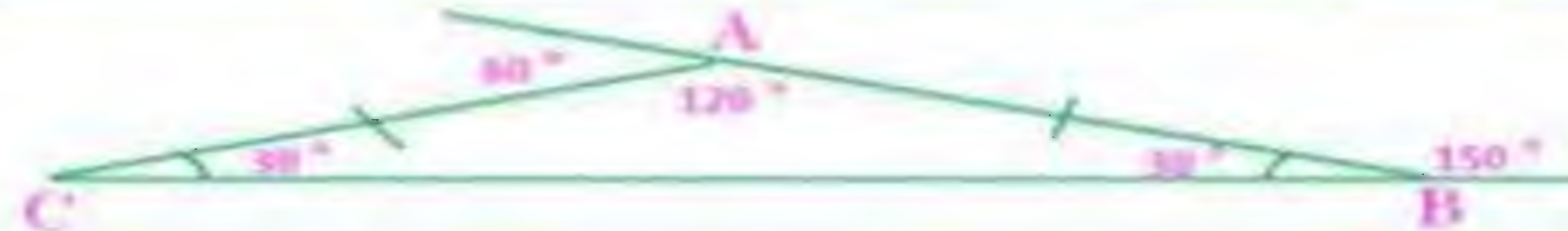
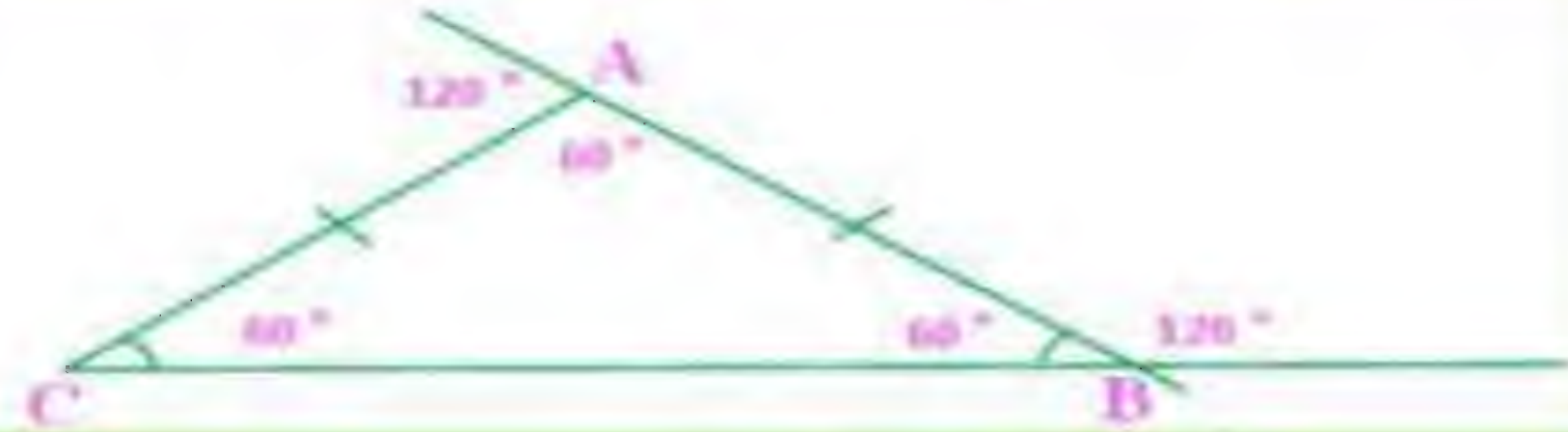
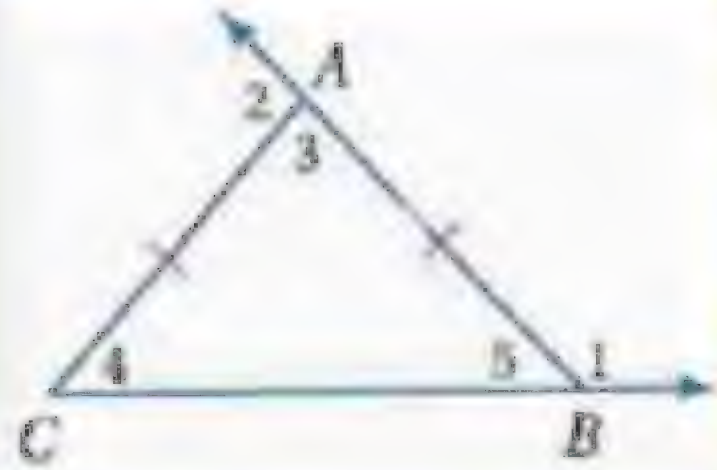
نظرية المثلث المتطابق الضلعين



(31) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة، سنكتشف القياسات الممكنة للزوايا الداخلية للمثلث المتطابق الضلعين، إذا علم قياس زاوية خارجية له.

(a) هندسيًا، استعمل المسطرة والمنقلة لرسم ثلاثة مثلثات مختلفة، كلٌّ منها متطابق الضلعين، ومُدِّد أحد ضلعي زاوية الرأس ومدَّت القاعدة من إحدى جهتيها كما في الشكل المجاور.

الجل

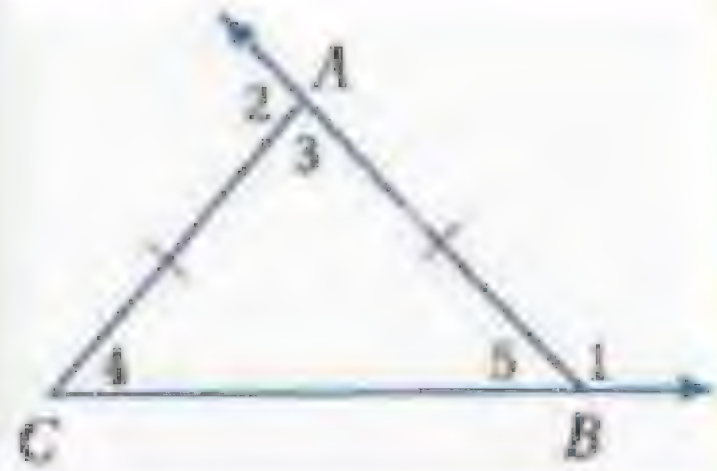


(b) جدوليًا، استعمل المنقلة لإيجاد  $m\angle 1$  لكل مثلث وسجِّله في جدول. واستعمل  $m\angle 1$  لحساب قياسات  $\angle 3$ ,  $\angle 4$ ,  $\angle 5$ ، ثم أوجد  $m\angle 2$  وسجِّله في جدول آخر واستعمله لحساب القياسات السابقة نفسها. رتِّب نتائجك في جدولين.

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 2$
40	40	100	80
60	60	60	120
30	30	120	60

$m\angle 5$	$m\angle 4$	$m\angle 3$	$m\angle 1$
40	40	100	140
60	60	60	120
30	30	120	150





(c) تخيلًا، وضح كيف استعملت  $m\angle 1$  لإيجاد قياسات  $\angle 3$ ,  $\angle 4$ ,  $\angle 5$ . ثم وضح كيف استعملت  $m\angle 2$  لإيجاد هذه القياسات نفسها.

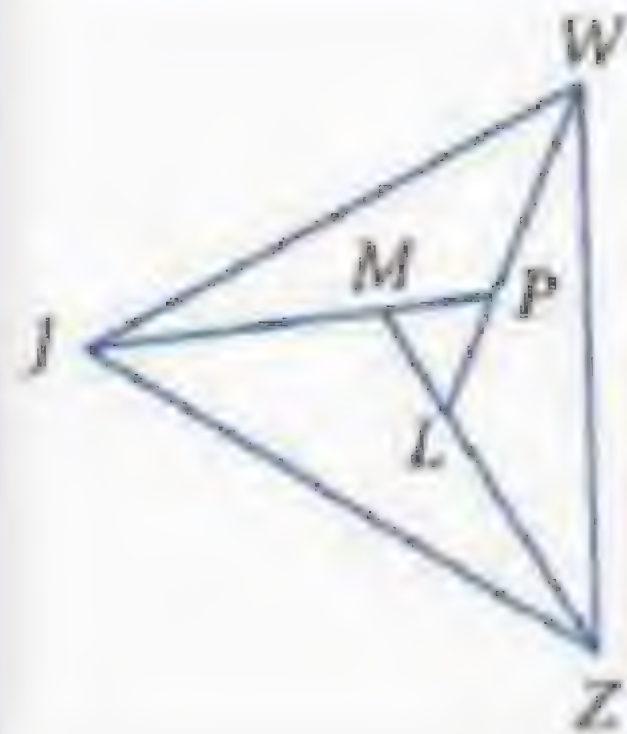
زاويتان متجاورتان على مستقيم  
 $m\angle 5 = 180 - m\angle 1$   
 نظرية المثلث المتطابق الضلعين  
 $m\angle 4 = m\angle 5$   
 نظرية مجموع قياسات زوايا المثلث  
 $m\angle 3 = 180 - (m\angle 4 + m\angle 5)$



(d) جبريًا، إذا كان  $m\angle 1 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من  $\angle 3$ ,  $\angle 4$ ,  $\angle 5$ ، وبالمثل إذا كان  $m\angle 2 = x$ ، فاكتب عبارة جبرية لإيجاد قياس كل من الزوايا نفسها.

$$\begin{aligned}
 m\angle 5 &= 180 - x \\
 m\angle 4 &= 180 - x \\
 m\angle 3 &= 180 - 2(180 - x) = 2x - 180
 \end{aligned}$$





(32) **تحديد** في الشكل المجاور إذا كان  $\triangle WJZ$  متطابق الأضلاع،  
 $\angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL$ ، فأثبت أن  $\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM}$ .

نعلم أن  $\triangle WJZ$  متطابق الأضلاع، وبما أن المثلث المتطابق الأضلاع يكون متطابق  
الزوايا، فإن  $\angle ZWJ \cong \angle WJZ \cong \angle JZW$  وبحسب تعريف تطابق الزوايا

الحل

وبالتعويض ينتج أن:

$$m \angle ZWP + m \angle PWJ = m \angle WJM + m \angle MJZ = \\ m \angle JZL + m \angle LZW$$

وبالتعويض مرة أخرى ينتج أن:

$$m \angle ZWP + m \angle PWJ = m \angle ZWP + m \angle PJZ = \\ m \angle ZWP + m \angle LZW$$

وبحسب خاصية الطرح للمساواة ينتج أن:

$$m \angle PWJ = m \angle PJZ = m \angle LZW$$

$$\angle PWJ \cong \angle PJZ \cong \angle LZW \text{ وبحسب مسطرة 4.S.4. ينتج أن}$$

$$\triangle WZL \cong \triangle ZJM \cong \triangle JWP \text{ ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين}$$

$$\overline{WP} \cong \overline{ZL} \cong \overline{JM} \text{ فإن متطابقة،}$$

$$m \angle ZWJ = m \angle WJZ = m \angle JZW$$

$$\text{وبما أن } \angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL \text{ فإن:}$$

$$m \angle ZWJ = m \angle WJZ = m \angle JZW$$

$$\text{وبما أن } \angle ZWP \cong \angle WJM \cong \angle JZL \text{ فإن:}$$

$$m \angle ZWP = m \angle WJM = m \angle JZL$$

ومن تعريف تطابق الزوايا وباستعمال

مسطرة جمع الزوايا ينتج أن:

$$m \angle ZWJ = m \angle ZWP + m \angle PWJ.$$

$$m \angle WJZ = m \angle WJM + m \angle MJZ.$$

$$m \angle JZW = m \angle JZL + m \angle LZW$$



**تبرير:** حدد ما إذا كانت كل من العبارتين الآتيتين صحيحة أحياناً أو دائماً أو غير صحيحة أبداً. ووضح إجابتك:

(33) إذا كان قياس زاوية رأس المثلث المتطابق الضلعين عدداً صحيحاً، فإن قياس كل من زاويتي القاعدة عدد صحيح.

**أحياناً، تكون صحيحة فقط عندما يكون قياس زاوية الرأس عدداً زوجياً.**

(34) إذا كان قياس كل من زاويتي القاعدة عدداً صحيحاً، فإن قياس زاوية الرأس عدد فردي.

**غير صحيحة أبداً،** لأن قياس زاوية الرأس يساوي (قياس إحدى زاويتي القاعدة)  $(2 - 180)$ ، إذا كان قياس إحدى زاويتي القاعدة عدد صحيح فإن مجموع قياس زاويتي القاعدة يكون عدداً زوجياً وبالتالي فإن قياس زاوية الرأس سيكون زوجياً أيضاً

(35) **مسألة مفتوحة:** ارسم مثلثاً متطابق الضلعين، فيه زاويتا القاعدة منفرجتان إن أمكنك ذلك، وإلا فوضح السبب.

**لا يمكن أن يحوي المثلث أكثر من زاوية منفرجة، لذا لا يمكن رسم المثلث المطلوب.**

(36) **اكتب:** وضح كيف تستعمل قياس زاوية قاعدة المثلث المتطابق الضلعين لإيجاد قياس زاوية الرأس.

مجموع قياسات زوايا المثلث يساوي 180 وزاويتا القاعدة لهما نفس القياس، لذا فإن قياس زاوية رأس المثلث يساوي 180 ناقصاً مثلي قياس إحدى زاويتي القاعدة







### لماذا؟

يستقبل نظام تحديد الموقع العالمي (GPS) البث من الأقمار الصناعية، والتي يمكن بواسطتها تحديد موقع السيارة. ويمكن الاستفادة من هذه المعلومات بالإضافة إلى برمجيات أخرى لتوجيه حركة السيارة.

### فيما سبق:

درست استعمال الهندسة الإحداثية لبرهان تطابق المثلثات.

### والآن:

■ أرسم مثلثات، وأحدد

مواقعها لاستعمالها في

البرهان الإحداثي.

■ أكتب برهاناً إحداثياً.

### المفردات:

البرهان الإحداثي

coordinate proof

**موقع المثلث وتسميته:** كما هو الحال في نظام تحديد الموقع العالمي، فإن معرفة إحداثيات رؤوس

شكل ما في مستوى إحداثي يمكنك من اكتشاف خصائصه والتوصل إلى استنتاجات خاصة به. ويستعمل

**البرهان الإحداثي** الأشكال في المستوى الإحداثي والجبر لإثبات صحة المفاهيم الهندسية. فالخطوة الأولى في

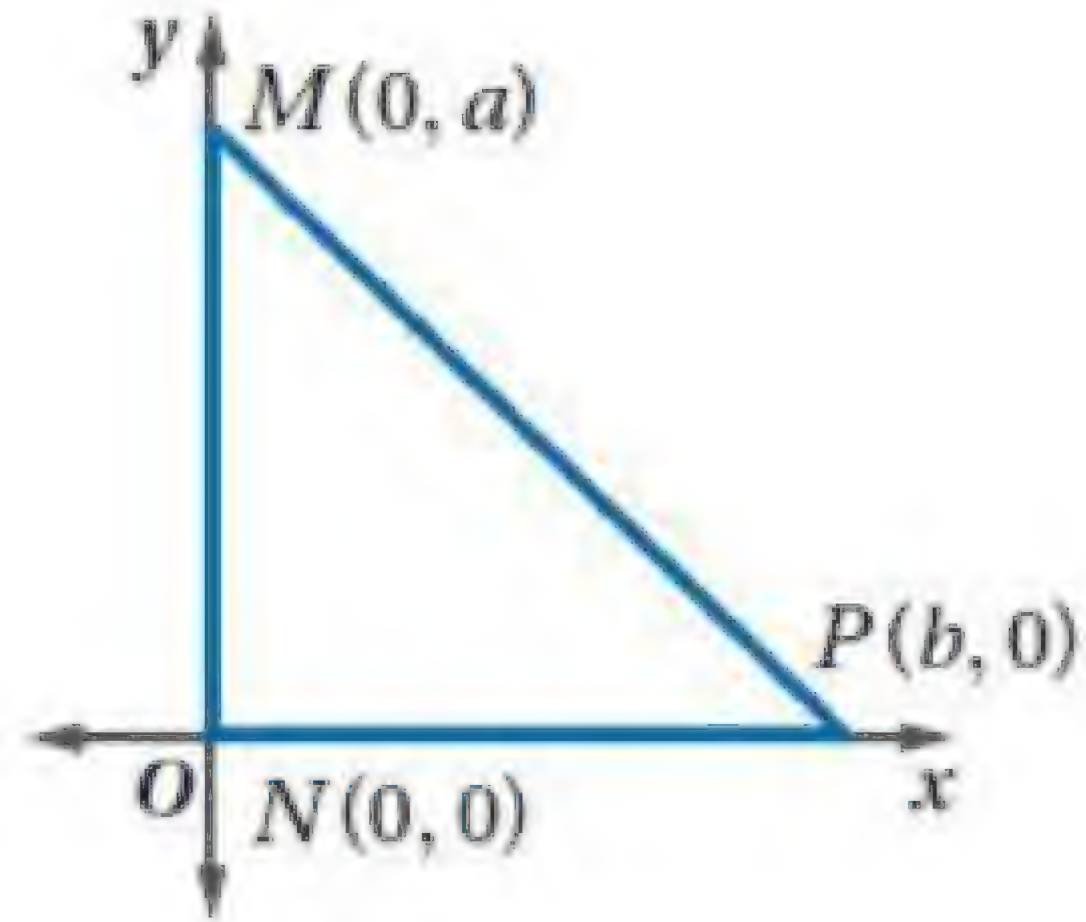
البرهان الإحداثي هي تمثيل الشكل في المستوى الإحداثي.



# Triangles and Coordinate Proof

## مثال 1

### تحديد موقع المثلث وتسميته



ارسم المثلث القائم  $MNP$  في المستوى الإحداثي، وسم رؤوسه على أن يكون طول الضلع  $\overline{MN}$  يساوي  $a$  وحدة، وطول  $\overline{NP}$  يساوي  $b$  وحدة.

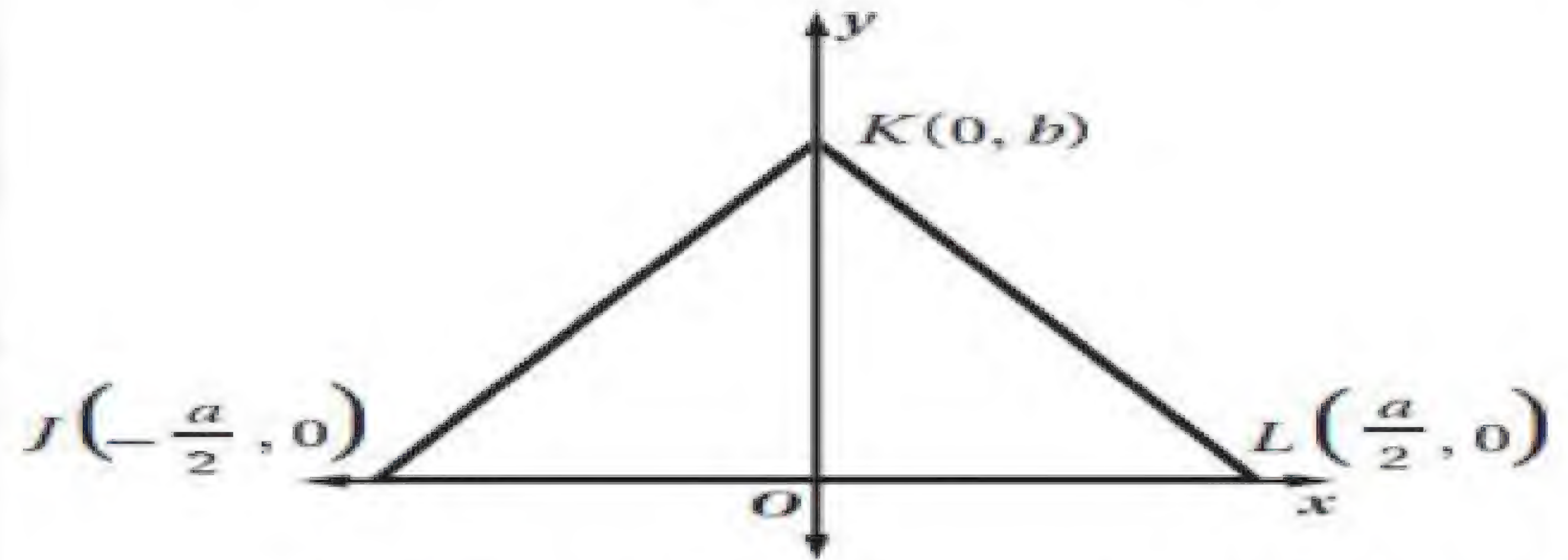
- يحدد طول الضلع الذي يقع على أحد المحاورين بسهولة؛ لذا من الأفضل وضع ضلعي القائمة على المحاورين  $x, y$ .
- اجعل زاوية المثلث القائمة  $\angle N$  على نقطة الأصل، فيكون ضلعا القائمة على المحاورين  $x, y$ .
- ارسم المثلث في الربع الأول.
- ارسم  $M$  على المحور  $y$ ، وبما أن طول  $\overline{MN}$  يساوي  $a$  وحدة، فإن إحداثيها  $x$  يساوي صفراً، وإحداثيها  $y$  يساوي  $a$ .
- ارسم  $P$  على المحور  $x$ ، وبما أن طول  $\overline{NP}$  يساوي  $b$  وحدة، فإن إحداثيها  $y$  يساوي صفراً، وإحداثيها  $x$  يساوي  $b$ .



# Triangles and Coordinate Proof

(1) ارسم المثلث  $JKL$  المتطابق الضلعين في المستوى الإحداثي وسم رؤوسه على أن يكون طول قاعدته  $\overline{JL}$  يساوي  $a$  وحدة، ويكون ارتفاعه  $b$  وحدة، ويقع الرأس  $K$  على المحور  $y$ .

(1)



(3) المعطيات: المثلثان  $\triangle CDX$  و  $\triangle ABX$

المطلوب:  $\triangle ABX \cong \triangle CDX$

البرهان:

نقطة منتصف  $\overline{AC}$  هي

$$\left( \frac{0 + a + x}{2}, \frac{0 + b}{2} \right) = \left( \frac{a + x}{2}, \frac{b}{2} \right)$$



# Triangles and Coordinate Proof

## مفهوم أساسي

### رسم المثلثات في المستوى الإحداثي

أضف إلى

مطوبتك

**الخطوة 1:** اجعل نقطة الأصل رأساً أو مركزاً للمثلث.

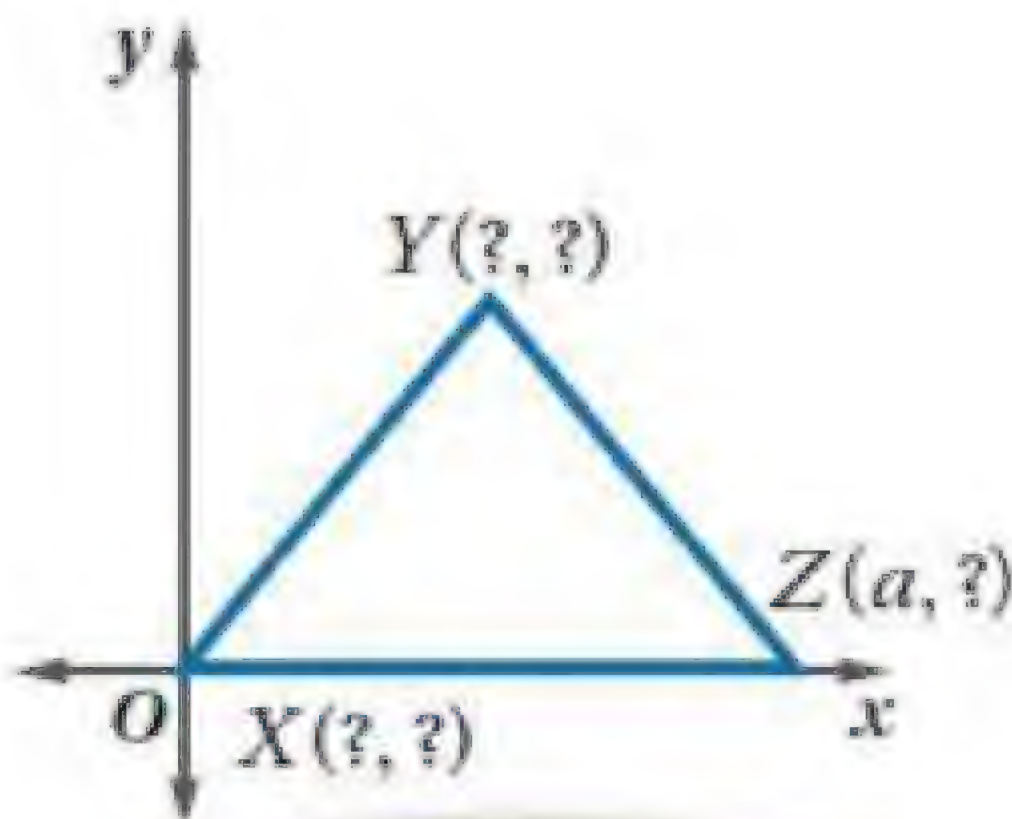
**الخطوة 2:** ارسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المثلث على أحد المحورين.

**الخطوة 3:** ارسم المثلث في الربع الأول إن أمكن.

**الخطوة 4:** استعمل الإحداثيات التي تجعل الحسابات أبسط ما يمكن.

## مثال 2

### إيجاد الإحداثيات المجهولة



أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث  $XYZ$  المتطابق الضلعين.

بما أن الرأس  $X$  يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي  $(0, 0)$ ، ولأن

الرأس  $Z$  يقع على المحور  $x$ ، فإن الإحداثي  $y$  يساوي صفراً، فتكون

إحداثيات الرأس  $Z$  هي  $(a, 0)$ ، وبما أن  $\triangle XYZ$  متطابق الضلعين، فإن

الإحداثي  $x$  للنقطة  $Y$  يقع في منتصف المسافة بين  $0$  و  $a$ ، ويكون  $\frac{a}{2}$ . وأما

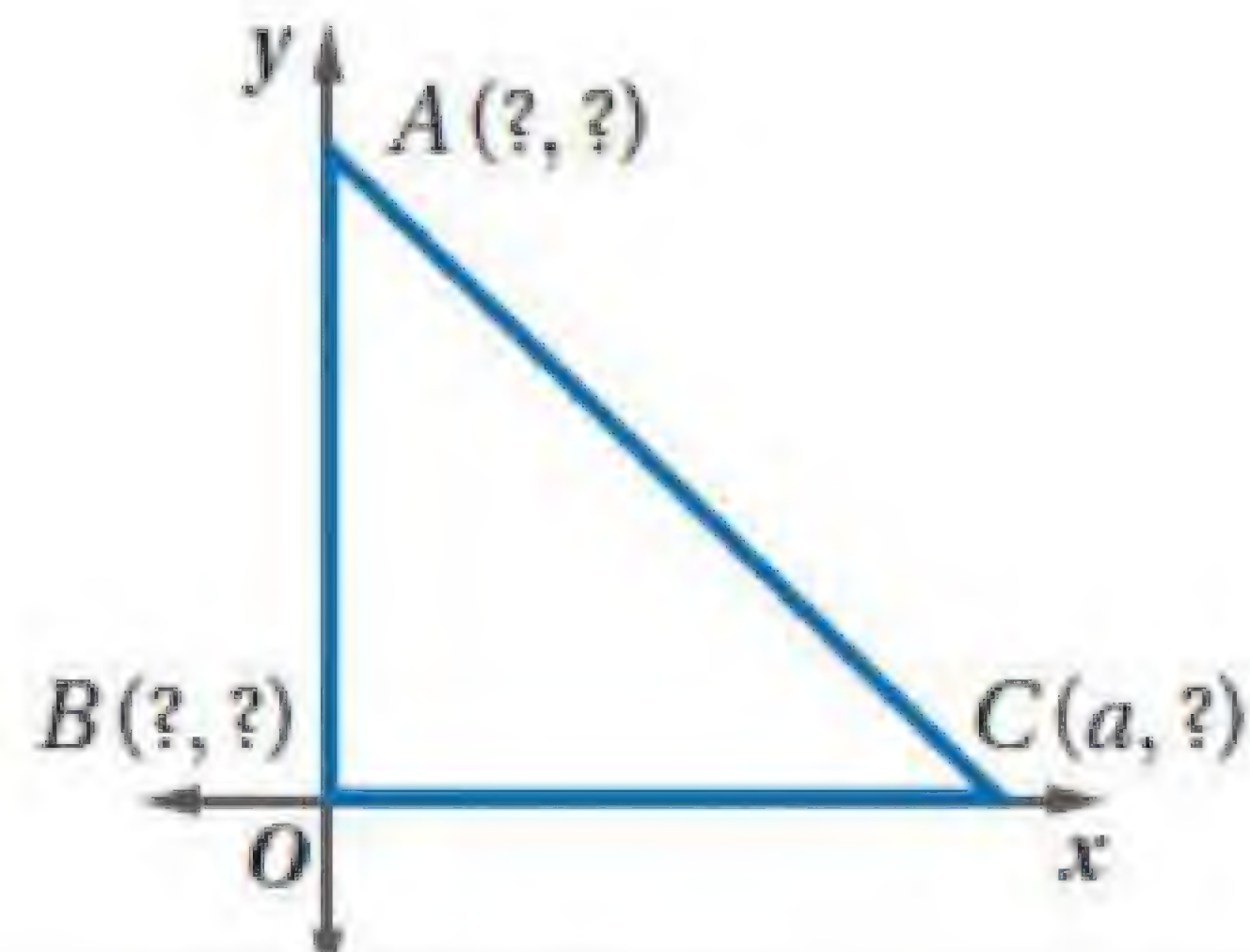
الإحداثي  $y$  للنقطة  $Y$  فلا يمكننا إيجاده بدلالة  $a$ ، وإذا افترضناه  $b$ ، فتكون

إحداثيات النقطة  $Y$  هي  $(\frac{a}{2}, b)$ .



## Triangles and Coordinate Proof

(2) أوجد الإحداثيات المجهولة في المثلث  $\triangle ABC$  المتطابق الضلعين والقائم الزاوية.



$$A(0, a), B(0, 0), C(a, 0)$$



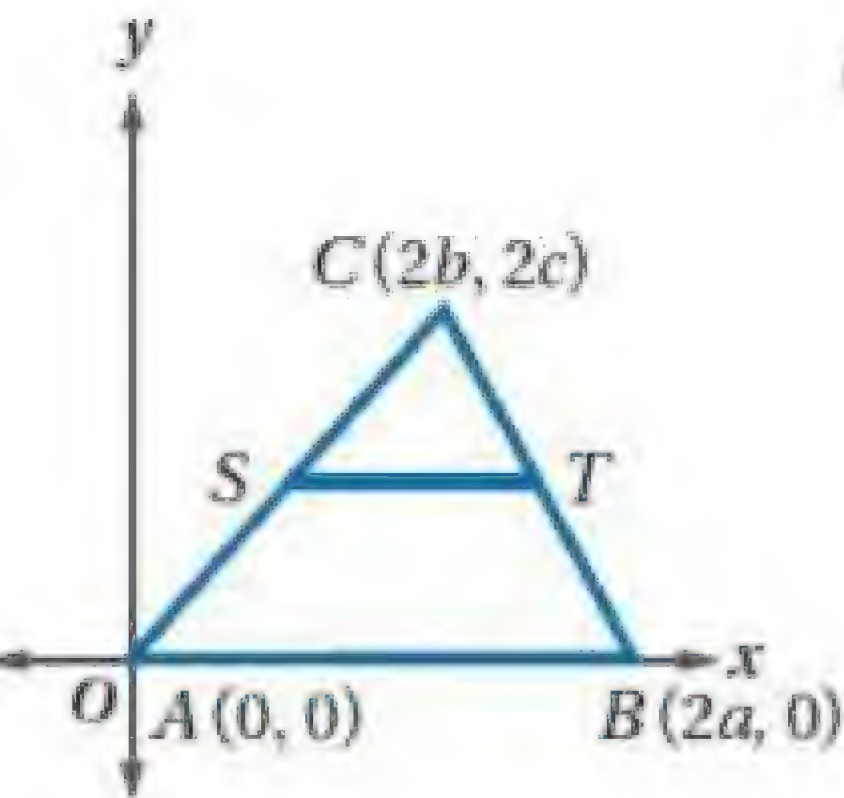
# Triangles and Coordinate Proof

## مثال 3

### كتابة البرهان الإحداثي

اكتب برهانًا إحداثيًا لإثبات أن القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

اجعل أحد رؤوس المثلث عند نقطة الأصل وسمِّه  $A$ . واستعمل إحداثيات من مضاعفات 2؛ لأن قانون نقطة المنتصف يتضمن قسمة مجموع الإحداثيين على 2.



المعطيات:  $\triangle ABC$ ، فيه:

$S$  نقطة منتصف  $\overline{AC}$

$T$  نقطة منتصف  $\overline{BC}$

المطلوب: إثبات أن  $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$

البرهان:

باستعمال قانون نقطة المنتصف، فإن إحداثيات  $S$  هي:  $\left(\frac{2b+0}{2}, \frac{2c+0}{2}\right) = (b, c)$

وكذلك إحداثيات  $T$  هي:  $\left(\frac{2a+2b}{2}, \frac{0+2c}{2}\right) = (a+b, c)$

وبتطبيق قانون الميل فإن ميل  $\overline{ST}$  هو:  $\frac{c-c}{a+b-b} = 0$

وميل  $\overline{AB}$  هو:  $\frac{0-0}{2a-0} = 0$

وبما أن ميل  $\overline{ST}$  يساوي ميل  $\overline{AB}$ ، فإن  $\overline{ST} \parallel \overline{AB}$ .

## إرشادات للدراسة

### البرهان الإحداثي

تنطبق الإرشادات

والطرائق المستعملة

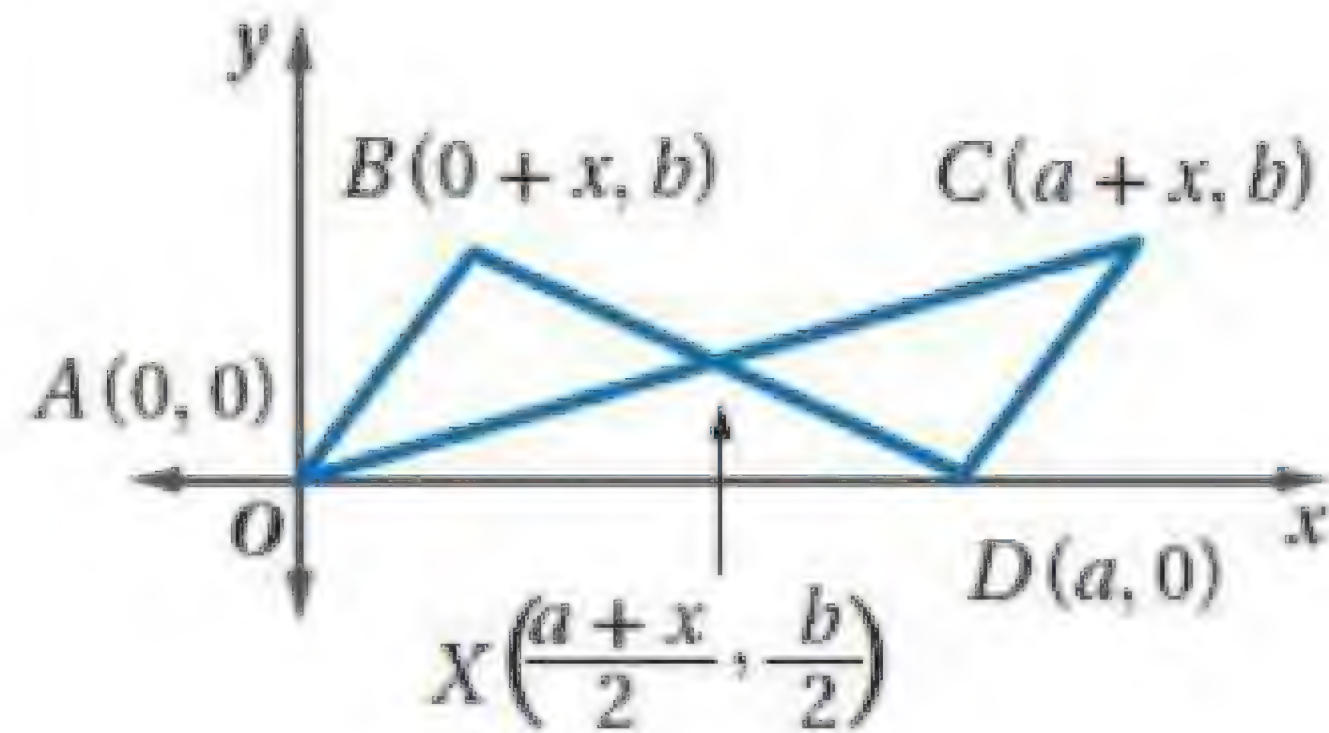
في هذا الدرس على كل

المضلعات، ولا تقتصر

على المثلثات.



# Triangles and Coordinate Proof



(3) اكتب برهاناً إحداثياً لإثبات أن:

$$\triangle ABX \cong \triangle CDX$$

نقطة منتصف  $\overline{BD}$  هي  $\left(\frac{0+x+a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a+x}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$CD = \sqrt{((a+x) - a)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

$$AB = \sqrt{((0+x) - 0)^2 + (b - 0)^2} = \sqrt{x^2 + b^2}$$

إحداثي نقطة منتصف  $\overline{AC}$  = إحداثي نقطة منتصف  $\overline{BD}$  = إحداثي

النقطة X؛ لذا  $\overline{AC}$  تُنصف  $\overline{BD}$  و  $\overline{BD}$  تنصف  $\overline{AC}$ ، وذلك بتعريف  
المنصف.

$$CD \cong AB \text{ بتعريف تطابق القطع المستقيمة.}$$

إذن  $\overline{CD} \cong \overline{AB}$  بتعريف تطابق القطع المستقيمة.

$\triangle ABX \cong \triangle CDX$  بحسب SSS.

وهذا يعني أن X هي منتصف كل من  $\overline{BD}$  و  $\overline{AC}$  أي أن:

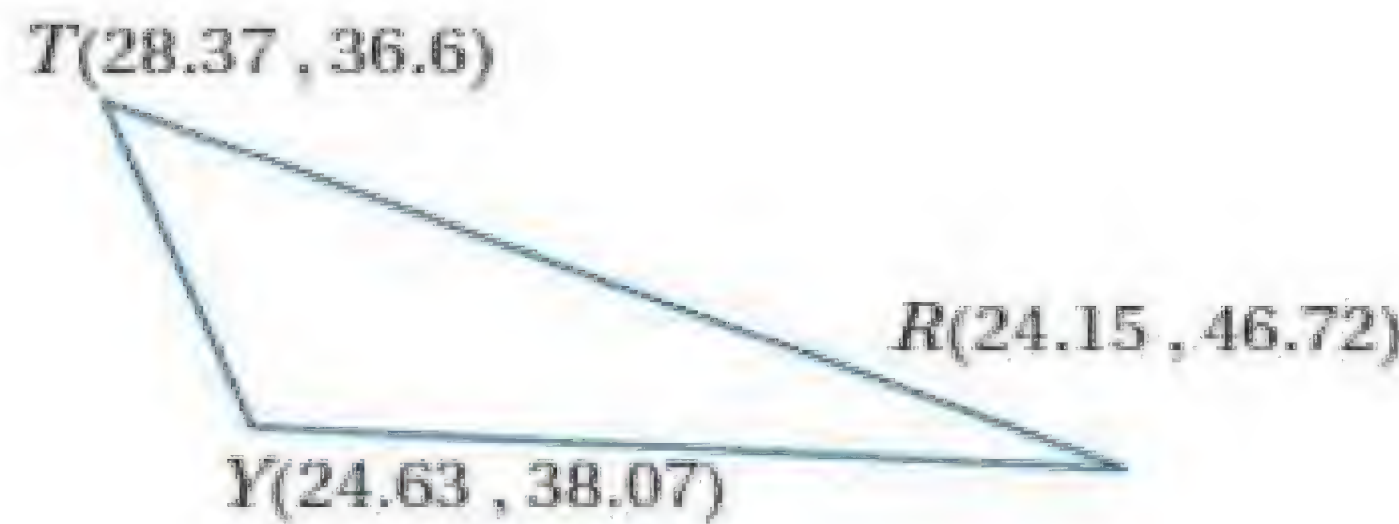


# Triangles and Coordinate Proof

## تصنيف المثلثات

## مثال 4 من واقع الحياة

**جغرافيا:** إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لكل من الرياض وينبع وتبوك هي:  
الرياض  $24.15^\circ\text{N } 46.72^\circ\text{E}$ ، ينبع  $24.63^\circ\text{N } 38.07^\circ\text{E}$ ، تبوك  $28.37^\circ\text{N } 36.6^\circ\text{E}$ ، فاكتب برهاناً إحداثياً يبين أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.



الخطوة الأولى هي رسم شكل تقريبي لهذا المثلث، وتعيين المواقع الثلاثة وإحداثياتها على الرسم. ولتكن  $R$  تمثل الرياض،  $Y$  تمثل ينبع،  $T$  تمثل تبوك.

إذا لم يتطابق أي ضلعين في  $\triangle RYT$  فسيكون مختلف الأضلاع. استعمل قانون المسافة بين نقطتين والآلة الحاسبة لإيجاد أطوال أضلاع المثلث.

$$RY = \sqrt{(24.15 - 24.63)^2 + (46.72 - 38.07)^2} \approx 8.66$$

$$RT = \sqrt{(28.37 - 24.15)^2 + (36.6 - 46.72)^2} \approx 10.96$$

$$YT = \sqrt{(24.63 - 28.37)^2 + (38.07 - 36.6)^2} \approx 4.02$$

وبما أن أطوال أضلاع المثلث مختلفة فهو مثلث مختلف الأضلاع. أي أن المثلث الذي رؤوسه الرياض وينبع وتبوك مختلف الأضلاع.



## Triangles and Coordinate Proof

(4) **جغرافيا:** يضم مجمع كسفي ثلاث فرق من ثلاث مدن تمثل مثلثًا.

إذا كانت الإحداثيات التقريبية لمواقع هذه المدن الثلاث هي:

تبوك  $28.37^{\circ}\text{N}36.6^{\circ}\text{E}$ ، عرعر  $30.9^{\circ}\text{N}41.13^{\circ}\text{E}$ ،

حائل  $27.43^{\circ}\text{N}41.68^{\circ}\text{E}$ ، فاكتب برهانًا إحصائيًا لإثبات أن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث متطابق الضلعين تقريبًا.

(4) افترض أن  $T$  ترمز لمدينة تبوك، و  $A$  ترمز لمدينة عرعر، و  $H$  لمدينة حائل.

$$AT = \sqrt{(28.37 - 30.9)^2 + (36.6 - 41.13)^2} \approx 5.19$$

$$HT = \sqrt{(28.37 - 27.43)^2 + (36.6 - 41.68)^2} \approx 5.17$$

$$AH = \sqrt{(30.9 - 27.43)^2 + (41.13 - 41.68)^2} \approx 3.51$$

وبما أن  $AT \approx HT$ ، إذن  $\triangle ATH$  متطابق الضلعين تقريبًا.





# Triangles and Coordinate Proof

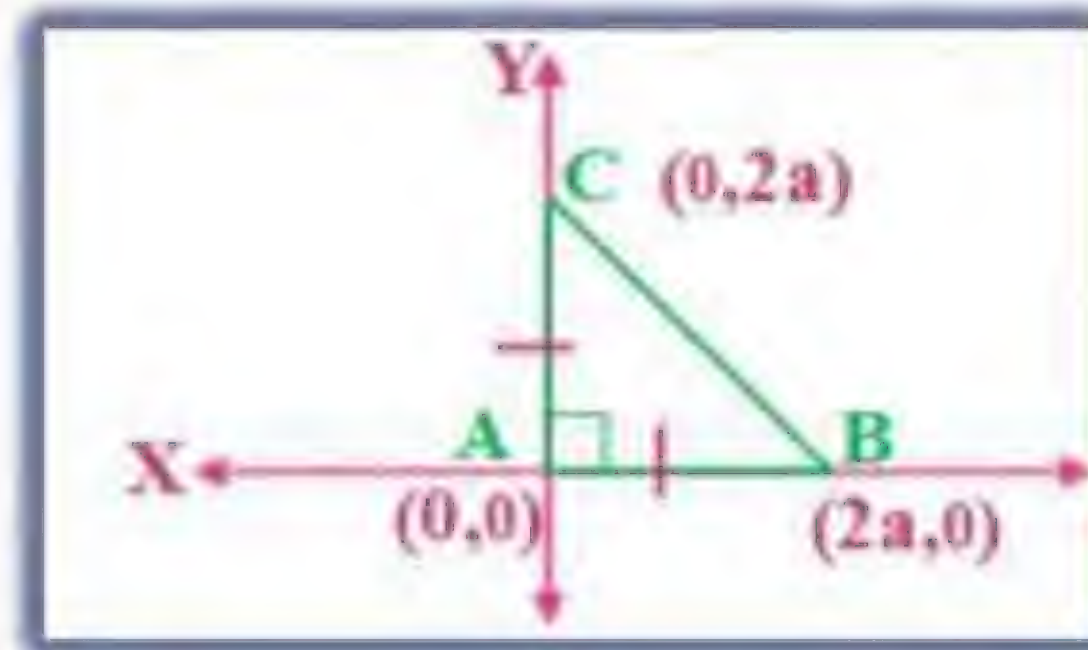
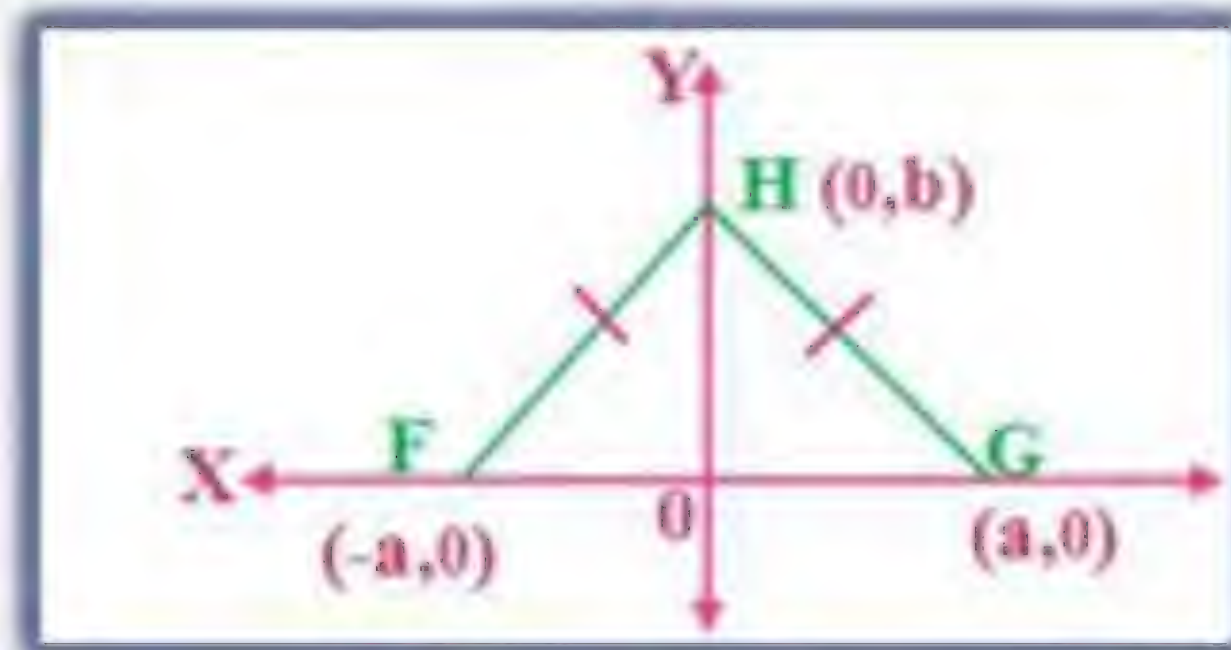
لا تأكد

المثال ١

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه :

(1)  $\triangle ABC$  قائم الزاوية، فيه  $\overline{AC}$  ضلعا القائمة، وطول  $\overline{AC}$  يساوي  $2a$  وحدة، وطول  $\overline{AB}$  يساوي  $2b$  وحدة.

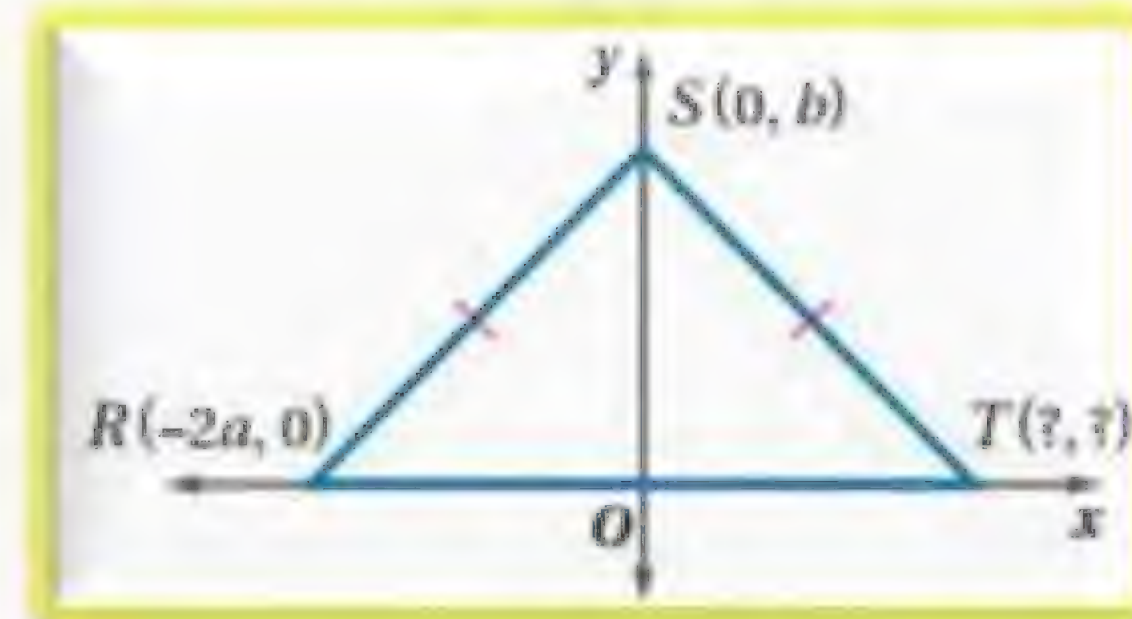
(2)  $\triangle FGH$  المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته  $\overline{FG}$  يساوي  $2a$  وحدة.



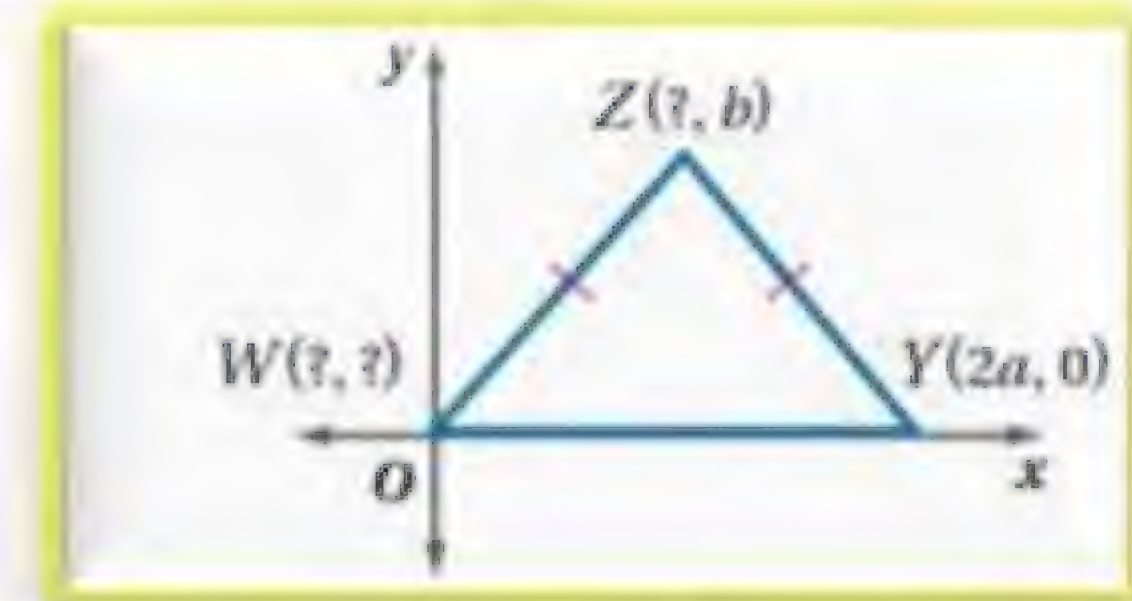
الحل



أوجد الإحداثيات المجهولة في كل من المثلثين الآتيين :



وبما أن الرأس  $T$  يقع على المحور  $x$  فإن الإحداثي  $0 = y$  وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن النقطة  $T$  تقع عند النقطة  $(a, 0)$

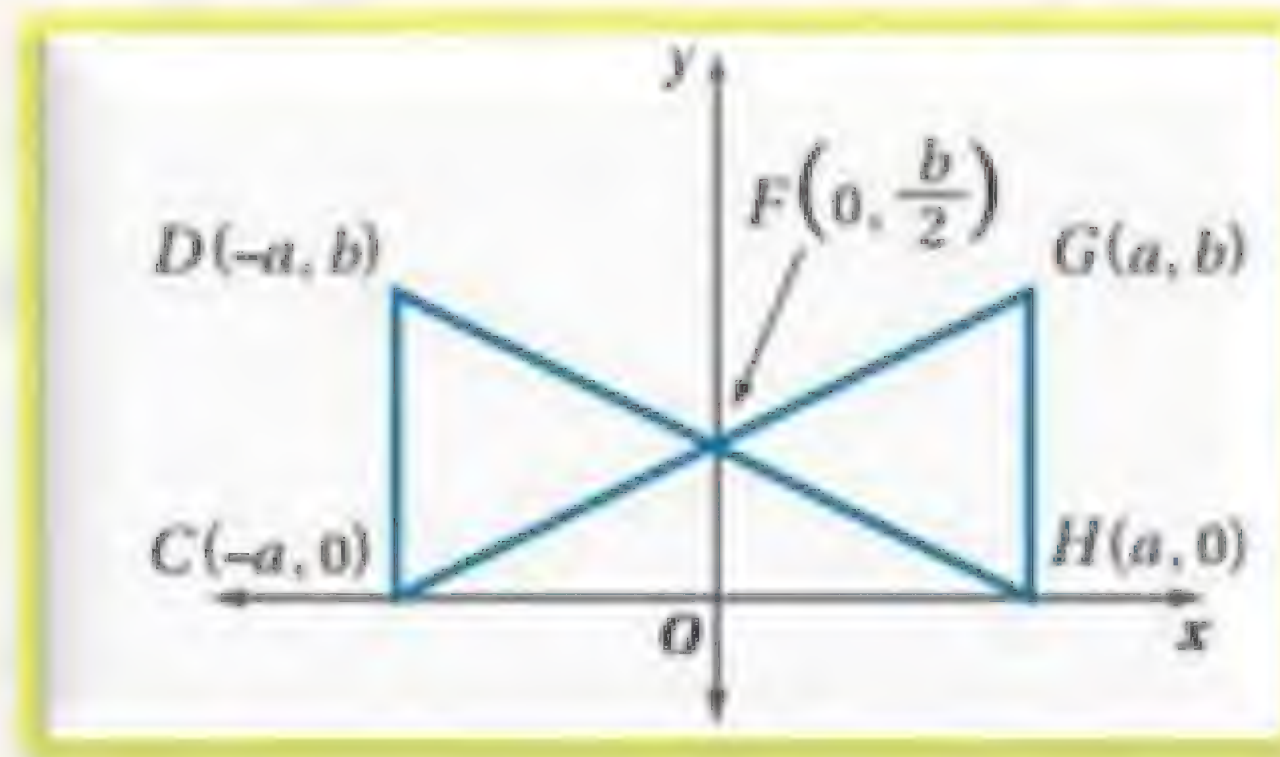


بما أن الرأس  $W$  يقع عند نقطة الأصل، فإن إحداثياته هي  $(0, 0)$   
 وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الإحداثي  $x$  للرأس  $Z$  يقع في منتصف المسافة بين  $0, 2a$  ويكون  $a$  إذن الإحداثي الرأسي  $Z$  :  $(a, b)$



اكتب برهاناً لطائفتين  $\triangle FGH \cong \triangle FDC$ .

المثال ٣



$$DF = \sqrt{(0 - a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$GF = \sqrt{(0 + a)^2 + \left(\frac{b}{2} - b\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$$DC = \sqrt{(-a - (-a))^2 + (b - 0)^2} = b$$

$$GH = \sqrt{(a - a)^2 + (b - 0)^2} = b$$

بما أن  $DC = GH$ ، فإن  $\overline{DC} \cong \overline{GH}$

$$CF = \sqrt{(0 + a)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

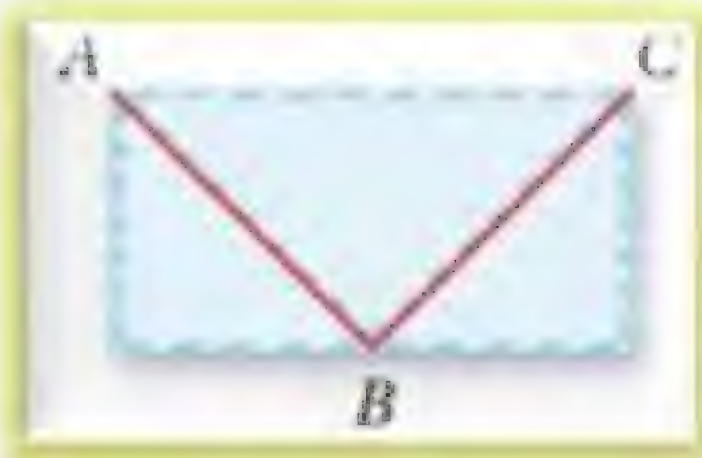
$$HF = \sqrt{(a - 0)^2 + \left(0 - \frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$$

$\triangle FGH \cong \triangle FDC$  بحسب SSS





## المثال ٤



(6) اكتب برهانًا إحدائيًا لإثبات أن المثلث  $ABC$  متطابق الضلعين، علماً بأن بُعدَي المظروف هما:  $10\text{ cm}$ ,  $20\text{ cm}$ ، والنقطة  $B$  في منتصف الحافة السفلى للمظروف.

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لتجد  $AB$  و  $BC$

$$A(0,10), B(10,0), C(20,10)$$

$$AB = \sqrt{(0-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

$$BC = \sqrt{(20-10)^2 + (10-0)^2} = \sqrt{200}$$

وبما أن  $AB = BC$ ، فإن  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$  ويكون الساقان متطابقتين، أي أن:  $\triangle ABC$  متطابق الضلعين.

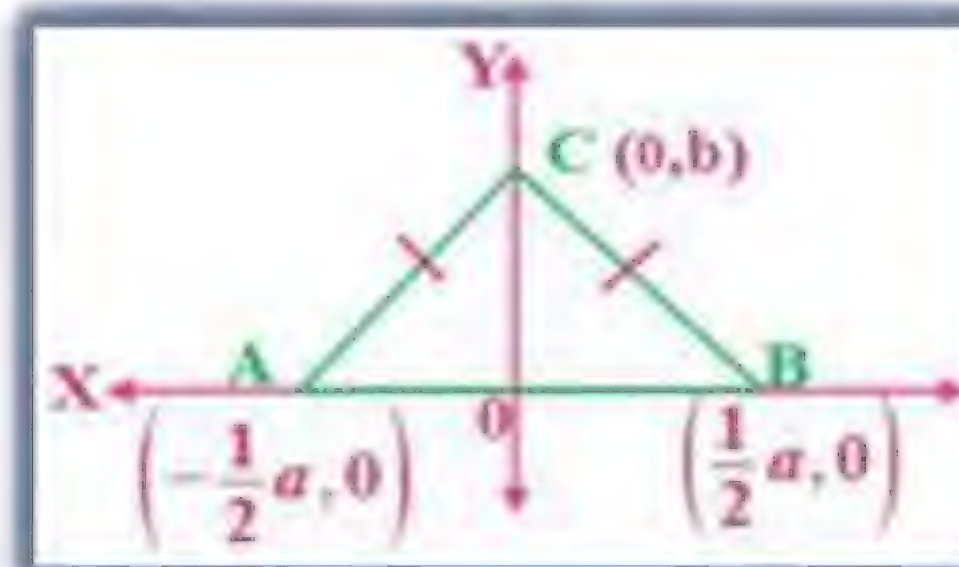
الحل



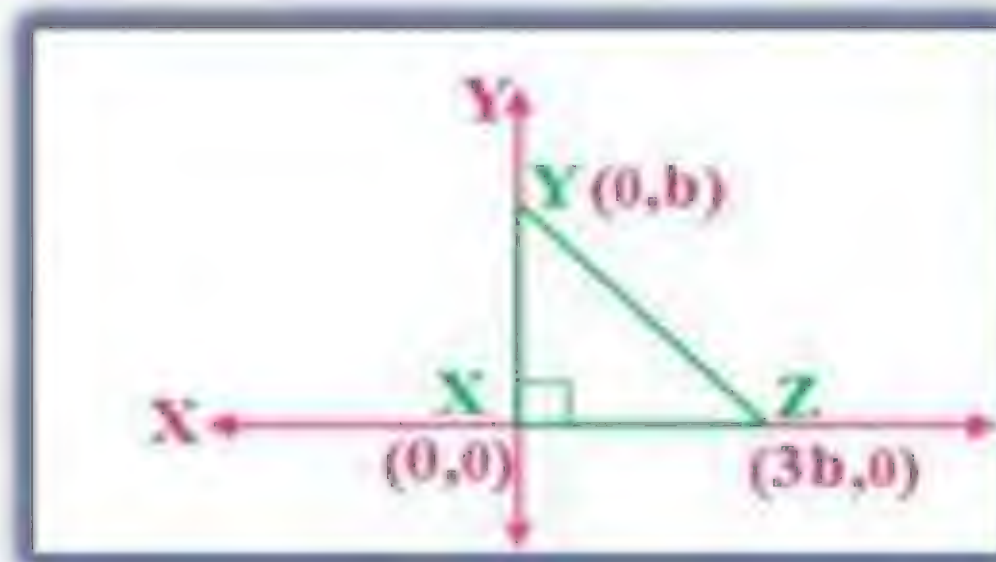
المثال 1

ارسم كلا من المثلثين الآتيين في المستوى الإحداثي وحدد إحداثيات رؤوسه :

(7)  $\triangle ABC$  المتطابق الضلعين الذي طول قاعدته  $AB$  يساوي  $a$  وحدة.



(8)  $\triangle XYZ$  القائم الزاوية الذي وتره  $YZ$ ، وطول الضلع  $XY$  يساوي  $b$  وحدة، وطول  $XZ$  ثلاثة أمثال طول  $XY$ .

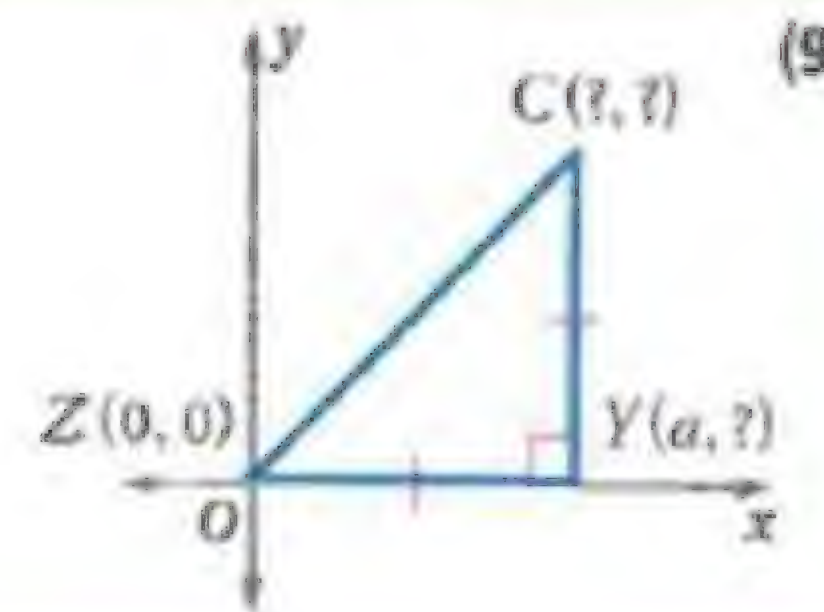
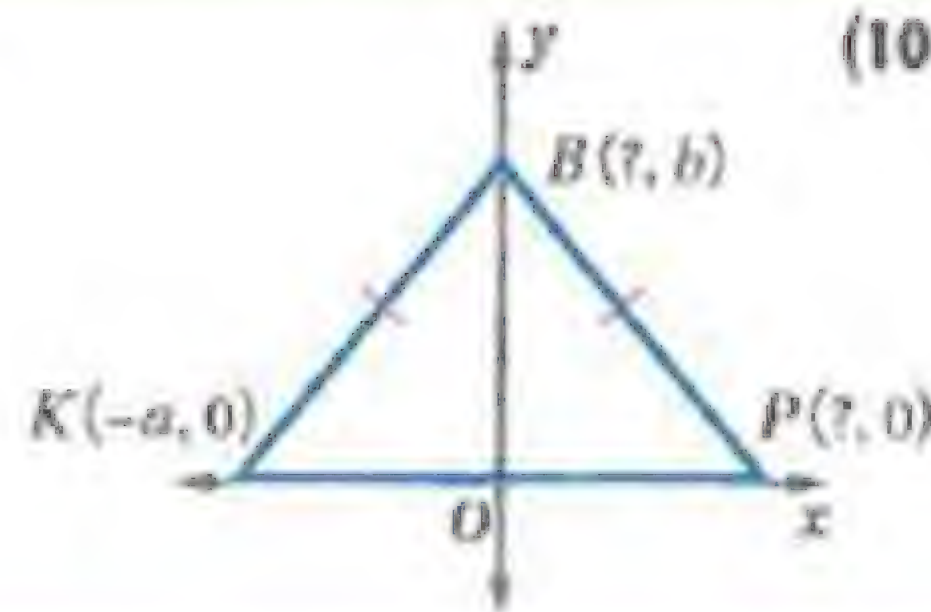
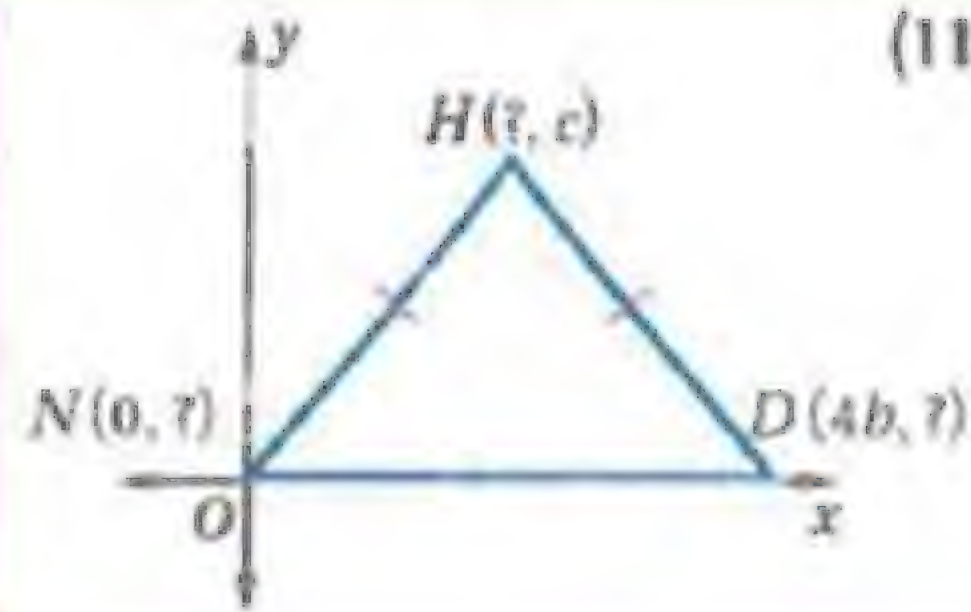


الحل



أوجد الاحداثيات المجهولة في كل مثلث مما يأتي:

المثال ٢



وبما أن الرأس N يقع عند نقطة الاصل فإن احداثياته هي  $(0,0)$

وبما أن الرأس D يقع على المحور X فإن الاحداثي  $Y=0$  وتكون الرأس  $D: (4b, 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين فإن الاحداثي X للرأس H يقع في منتصف المسافة بين  $0, 4b$  ويكون  $2b$  إذن الاحداثي الراسي H  $(2b, C)$

وبما أن الرأس B يقع على المحور Y فإن الاحداثي  $X=0$  وتكون الرأس  $B: (0, b)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن  $b$  تقع في المنتصف إذن النقطة P  $C: (a, 0)$

وبما أن الرأس Y يقع على المحور X فإن الاحداثي  $Y=0$  وتكون الرأس  $Y: (a, 0)$

وبما أن المثلث متطابق الضلعين إذن تكون الرأس  $C: (a, a)$





اكتب برهانا احداثيا لكل عبارة من العبارات الاتية

(12) القطع المستقيمة الثلاث الواصلة بين نقاط منتصفات أضلاع مثلث متطابق الضلعين تشكل مثلثا متطابق الضلعين أيضا.



إحداثيات  $R$  هي  $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات  $S$  هي  $\left(\frac{a+2a}{2}, \frac{b+0}{2}\right) = \left(\frac{3a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

إحداثيات  $T$  هي  $\left(\frac{2a+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (a, 0)$

$$ST = \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

$$RT = \sqrt{\left(\frac{a}{2} - a\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$$

الاحظ أن  $RT = ST$ ، وهذا يعني أن  $\overline{RT} \cong \overline{ST}$ ، لذا فالمثلث  $\triangle RST$  متطابق



(13) طول القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفَي ضلعين في المثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث.

$$ST = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2} - \frac{c}{2}\right)^2} = \frac{a}{2}$$

$$AB = \sqrt{(a-0)^2 + (0-0)^2} = a$$

$$ST = \frac{1}{2} AB \text{ إذن}$$

إحداثيات  $S$  هي  $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

وإحداثيات  $T$  هي  $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$

**الحل**

(14) **جغرافياً**، إذا علمت أن الإحداثيات التقريبية لمواقع مدن جيزان ونجران وخميس مشيط هي:  
جيزان  $16.9^\circ N$   $42.58^\circ E$ ، نجران  $17.5^\circ N$   $44.16^\circ E$ ، خميس مشيط  $18.3^\circ N$   $42.8^\circ E$ ، فبين أن المثلث الذي رؤوسه هي هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

المسافة بين جيزان ونجران:  $1.69 \approx \sqrt{(16.9 - 17.5)^2 + (42.58 - 44.16)^2}$

المسافة بين جيزان وخميس:  $1.42 \approx \sqrt{(16.9 - 18.3)^2 + (42.58 - 42.8)^2}$

المسافة بين نجران وخميس:  $1.58 \approx \sqrt{(17.5 - 18.3)^2 + (44.16 - 42.8)^2}$  وبما

أن هذه المسافات مختلفة، فإن المثلث الذي رؤوسه هذه المدن الثلاث مختلف الأضلاع.

**الحل**



في  $\triangle XYZ$ ، أوجد ميل كل ضلع من أضلاعه، ثم حدد ما إذا كان المثلث قائم الزاوية أم لا. ووضح إجابتك:

$$X(0, 0), Y(1, h), Z(2h, 0) \quad (16)$$

$$X(0, 0), Y(2h, 2h), Z(4h, 0) \quad (15)$$

الحل

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2h - 0}{2h - 0} = 1$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2h}{4h - 2h} = -1$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{4h - 0} = 0$$

$$m_{(x,y)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{h - 0}{1 - 0} = h$$

$$m_{(y,z)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - h}{2h - 1} = \frac{-h}{2h - 1}$$

$$m_{(z,x)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 0}{2h - 0} = 0$$

ميل  $XY$  يساوي 1، ميل  $YZ$  يساوي -1 ميل  $ZX$  يساوي صفرا

وبما أن ناتج ضرب ميلي ضلعين في المثلث يساوي -1 فإنه قائم الزاوية.

ميل  $XY$  يساوي  $h$ ، ميل  $YZ$  يساوي  $\frac{-h}{2h - 1}$  ميل  $ZX$  يساوي صفرا

ولا يوجد ميلان ناتج ضربهما يساوي -1 إذن المثلث ليس قائم الزاوية



**17) فزهة:** أقامت عائلتان خيمتين في متنزه كبير. إذا اعتبرنا أن موقع إدارة المتنزه تقع عند النقطة  $(0, 0)$ ، وأن إحداثيات موقعي الخيمتين هما  $(12, 9)$ ،  $(0, 25)$ . فاكتب برهاناً إحصائياً لإثبات أن الشكل المتكون من مواقع إدارة المتنزه والخيمتين هو مثلث قائم الزاوية.



ميل الطريق الواصل بين الخيمتين يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 25}{12 - 0} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}$$

وميل الطريق بين موقع الإدارة والخيمة الواقعة عند  $(12, 9)$  يساوي:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{9 - 0}{12 - 0} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

وبما أن  $-1 = \frac{-4}{3} \times \frac{3}{4}$ ، فإن المثلث المتشكل من الخيمتين وإدارة المتنزه مثلث قائم الزاوية.





18) **رياضة مائية**، انطلقت ثلاثة قوارب هائية من الرصيف نفسه، فاتجه الأول نحو الشمال الشرقي، واتجه الثاني نحو الشمال الغربي، أما الثالث فاتجه نحو الشمال.

توقف القاريان (الأول والثاني) على بُعد 300 m تقريباً من الرصيف، بينما توقف الثالث على بُعد 212 m من الرصيف.

ه) إذا اعتبرنا أن الرصيف يمثل النقطة (0, 0)، فمثل هذا الوضع بيانياً، وأوجد معادلة خط سير القارب الأول، ومعادلة خط سير القارب الثاني، وفسر إجابتك.



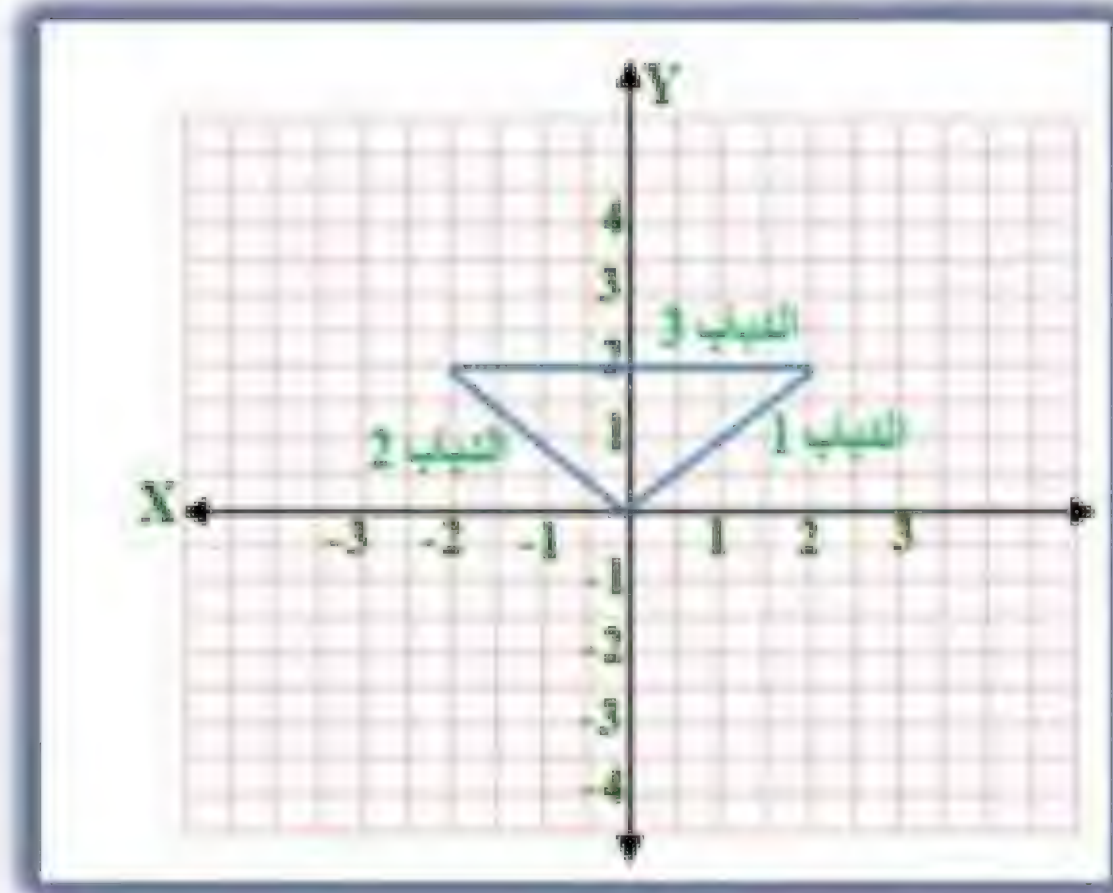
**القارب الأول يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للشرق من نقطة الأصل و الجزء المقطوع من محور الصادات = 0**

**لذا ميل معادلة سير القارب الأول = 1، معادلته هي  $y = x$**

**بالمثل القارب الثاني يسير نفس عدد الوحدات للشمال و للغرب من نقطة الأصل والجزء المقطوع من محور الصادات = 0**

**لذا ميل معادلة سير القارب الثاني = (-1) و معادلته هي  $y = -x$**

**القارب الثالث يسير إلى الشمال و هذا يعني على محور الصادات، لذا معادلة المستقيم هي  $x = 0$**







(b) اكتب برهاناً حراً لإثبات أن الرصيف والقاربين (الأول والثاني) تُشكل مثلثاً قائم الزاوية متطابق الضلعين.

**المسافة بين الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني 300M، لذا فإن هذين الضلعين متطابقان. ويكون المثلث المتكون من الرصيف وكل من القاربين الأول والثاني متطابق الضلعين بحسب تعريف المثلث المتطابق الضلعين.**



(c) أوجد إحداثيات مواقع هذه القوارب الثلاثة، وفسر إجابتك.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$2x^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$x = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$

**الدباب الأول سار نفس الوحدات الى الشمال و الشرق من نقطة الاصل لذا مسار الدباب الأول يعتبر وتر للمثلث القائم المتطابق الأضلاع.**  
**نفرض X طول الساقين المتطابقتين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.**

**بالمثل للدباب الثاني نفرض ان Y طول الساقين المتطابقتين للمثلث القائم و المتطابق الاضلاع.**

$$2y^2 = 300 \times 300 = 90000$$

$$y = \sqrt{\frac{90000}{2}} = \sqrt{45000} = 150\sqrt{2}$$





حيث أن مسار الدياب الأول يقع في الربع الأول ، لذا فإن إحداثياته هي:  
 $(150\sqrt{2} , 150\sqrt{2})$

بالمثل الدياب الثاني يقع في الربع الثاني، لذا فإن إحداثياته هي:  
 $(-150\sqrt{2} , 150\sqrt{2})$

الدياب الثالث سار إلى الشمال  $212 \text{ km}$  على محور الصادات، لذا إحداثياته هي  
 $(0 , 212)$



(d) اكتب برهاناً إحدائياً لإثبات أن القوارب الثلاثة تقع على خط مستقيم واحد تقريباً، وأن القارب الثالث يقع في منتصف المسافة بين القاربين الأول والثاني.



$$\therefore 150\sqrt{2} \approx 212.13$$

لذا يعتبر الثلاث دبابات لهما تقريباً نفس الإحداثي الصادي، أي تقريباً على استقامة واحدة

منتصف المسافة بين الدباب الأول و الثاني:

$$\left( \frac{150\sqrt{2} + (-150\sqrt{2})}{2}, \frac{212 + 212}{2} \right) = (0, 212)$$

و هذا هو موقع الدباب الثالث.



**تحذّر:** إذا كانت إحداثيات النقطة  $J$  هي  $(0, 0)$ ، والنقطة  $K$  هي  $(2a, 2b)$ ، فأوجد إحداثيات النقطة  $L$ ، على أن يكون  $\triangle JKL$  من النوع المحدّد في كلّ من الأسئلة الثلاثة الآتية:

- (19) مثلث مختلف الأضلاع      (20) مثلث قائم الزاوية      (21) مثلث متطابق الضلعين

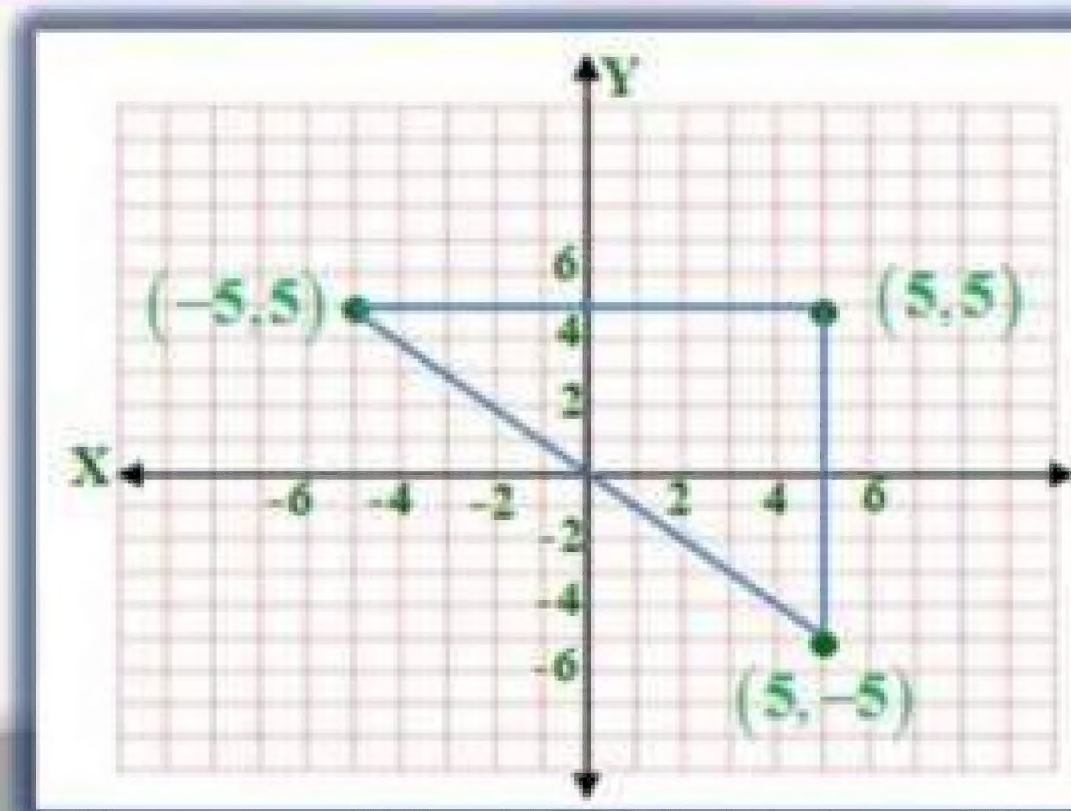


بما أن المثلث متطابق الضلعين  
والنقطة  $K$  تقع في منتصف  
المسافة بين الرأس  $J$ ،  $L$   
إذن النقطة  $L$ :  $(4a, 0)$

$L$ :  $(2a, 0)$

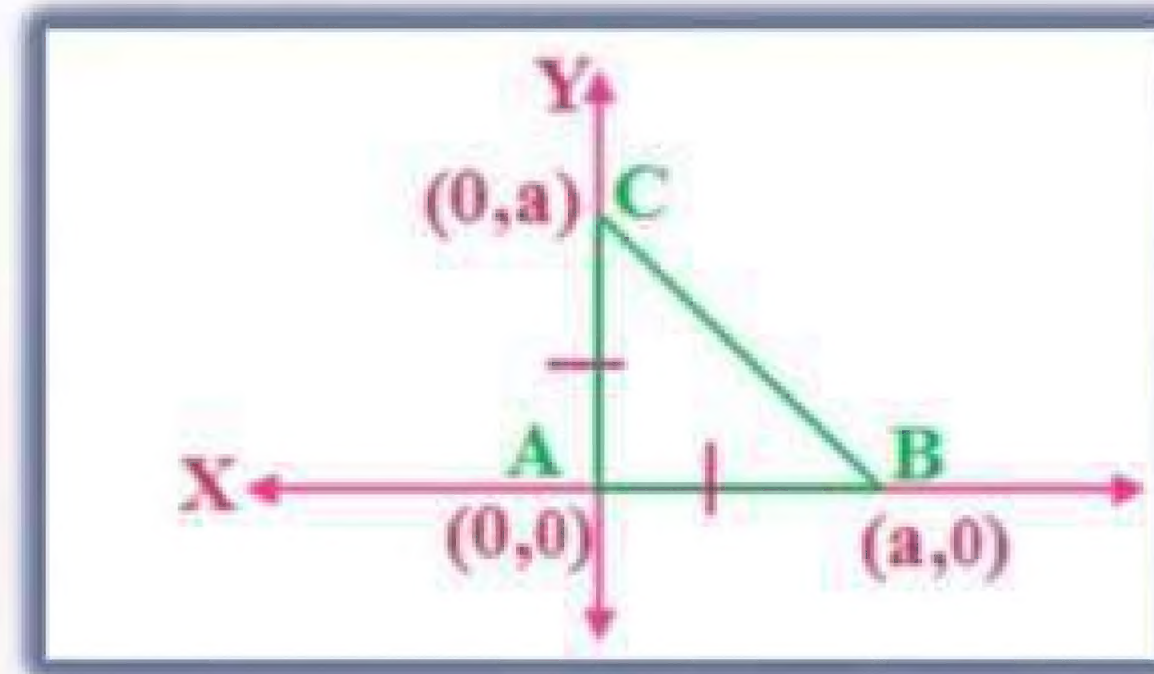
$L$ :  $(a, 0)$

(22) **مسألة مفتوحة:** في المستوى الإحداثي، ارسم مثلثًا قائم الزاوية متطابق الضلعين، على أن تكون نقطة الأصل هي نقطة منتصف وتره، وحدّد إحداثيات كل رأس من رؤوسه.





**(23) تبرير:** إحداثيات رأسين في مثلث هما:  $(a, 0)$ ,  $(0, 0)$ . إذا أعطي إحداثي الرأس الثالث بدلالة  $a$ ، وكان المثلث متطابق الضلعين، فحدد إحداثيات الرأس الثالث، ثم ارسم المثلث في المستوى الإحداثي.



بما أن الرأس الثالث يقع على محور  $Y$   
 إذن  $X = 0$  وتكون إحداثيات الرأس  $(0, a)$



24) **اكتب**، وضح فائدة اتباع كل من الإرشادات الآتية؛ لرسم المثلث في المستوى الإحداثي عند كتابة البرهان الإحداثي:

(a) اجعل نقطة الأصل أحد رؤوس المثلث.

**(a) استعمال نقطة الأصل رأسا للمثلث يسهل العمليات الحسابية لأن إحداثيات نقطة الأصل (0,0)**



(b) ارسم ضلعاً واحداً على الأقل من أضلاع المثلث على المحور  $x$  أو المحور  $y$ .

**(b) رسم ضلع واحد على الأقل للمثلث على المحور  $x$  أو المحور  $y$  يسهل الحسابات عند إيجاد أطوال أضلاع لأن أحد الإحداثيات يكون 0**

(c) حاول أن يقع المثلث في الربع الأول ما أمكن ذلك.

**(c) رسم المثلث في الربع الأول يجعل جميع إحداثيات رؤوسه موجبة وهذا يسهل إجراء العمليات الحسابية.**